X
J92
JL

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel

H. Hasse L. Schlesinger

Wissenschaftlicher Beirat

H. Brandt / M. Dehn / G. Doetsch / A. Fraenkel / O. Haupt / F. Hausdorff
E. Hellinger / G. Kowalewski / H. Rademacher / K. Reidemeister
A. Rosenthal / C. Schaefer / W. Schmeidler / F. Schottky / O. Toeplitz

Band 169

Heft 4

Ausgegeben den 8. Juni 1933

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1933

Band 169. Heft 4.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Keller, Ott-Heinrich, Cremona-Transformationen algebraischer Kurven	193
Wilton, J. R., An approximate functional equation with applications to a problem of Diophantine approximation	219
Watson, G. N., Über die Schläflischen Modulargleichungen	238
Dietrich, Rudolf, Eine Darstellung des Integrales der Riccatischen Gleichung: $y' + y^2 = f(x)$	252

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgend einem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg-Lahn, Behringweg 7.

Cremona-Transformationen algebraischer Kurven*).

Von *Ott-Heinrich Keller* in Berlin-Charlottenburg.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 193
Bekannte Tatsachen 194
I. Analytischer Teil 195
Die singulären Punkte 195
Die Segre-Transformation 196
Die ganze Jonquières-Transformation 197
Existenz der Jonquières-Transformation mit gegebenen Fundamentalpunkten 198
Jonquières-Transformation algebraischer Kurven 200
Der Zerlegungssatz 204
II. Teil: Die Gruppe 207
Die Punkte 207
Die Erzeugenden der Gruppe 209
Die Relationen der Gruppe 210
Anwendung auf unser Problem 212
III. Teil: Das Äquivalenzproblem 214
I. Hauptfall: $i_0 = \frac{n}{3}$ 214
II. Hauptfall: $i_0 > \frac{n}{3}$ 216

Einleitung.

Zweck der folgenden Untersuchung ist, ein Verfahren zur Entscheidung anzugeben, ob zwei gegebene algebraische Kurven durch eine Cremona-Transformation ineinander überführbar sind oder nicht.

Marletta [1]) behandelt einige Spezialfälle unter der Voraussetzung, daß eine *birationale* Beziehung zwischen den beiden Kurven bereits bekannt ist.

Dem Verfasser schien es nun eine viel schwerer zu behandelnde Frage zu sein, ob zwischen zwei Kurven eine birationale Beziehung besteht, und er hatte ursprünglich gehofft, durch Betrachtung der Cremona-Transformationen irgendwelche Aufschlüsse über birationale Transformationen zu bekommen. Es sei also im Folgenden versucht, ein Verfahren zur Entscheidung der Äquivalenzfrage anzugeben, auch wenn man nicht weiß, ob sich die betrachteten Kurven birational ineinander überführen lassen.

Der Grundgedanke ist der folgende: Man transformiert zunächst die Kurven auf einen niedrigeren Grad. Hierzu muß ein Verfahren angegeben werden und dann

*) Habilitationsschrift zur Erlangung der renia legendi an der Technischen Hochschule Charlottenburg.

[1]) Pal. Rend. 24 pg. 239.

eines zur Entscheidung, ob man den niedrigsten Grad schon erreicht hat, oder ob sich der Grad noch weiter erniedrigen läßt. Dies wird durch Betrachtung gewisser Gruppen von Cremona-Transformationen gewonnen, bei denen das Produkt zweier Transformationen in etwas anderer Weise definiert ist als gewöhnlich.

Dann wäre eine Ubersicht über die Transformationen zu gewinnen, die den Grad einer Kurve erhalten, wenn er schon möglichst klein ist. Dies ist in einem schon von Marletta genannten Fall nicht gelungen: für die Kurven $3n$. Grades mit mehr als 8 n-fachen Punkten vom Geschlecht 0 oder 1. In allen andern Fällen ist es durchgeführt.

Es soll also im I. Teil einiges wohl zum Teil bekannte über *Jonquières-Transformationen* in einer für unsere Zwecke handlichen Form zusammengestellt werden. Dann soll der *Noethersche Satz* über die Möglichkeit der Zerlegung in quadratische und Jonquières-Transformationen in etwas abweichender Fassung behandelt werden.

Im II. Teil wird dann die oben erwähnte Gruppe von Cremona-Transformationen eingeführt, ein vollständiges System von Relationen angegeben und mit ihrer Hilfe der Satz bewiesen, daß sich der Grad einer Kurve stets schon durch eine Jonquières-Transformation erniedrigen lassen muß, wenn dies überhaupt durch eine Cremona-Transformation möglich ist.

Im III. Teil wird dann eine solche Klasseneinteilung der Kurven von kleinstem Grad gegeben, daß zwei Kurven verschiedener Klassen nicht ineinander übergeführt werden können. Ob zwei Kurven derselben Klasse ineinander überführbar sind, ist in einigen Fällen leicht, in dem oben erwähnten Fall mit Hilfe unserer Methoden gar nicht zu entscheiden. Immerhin ist die Frage für alle Kurven von höherem Geschlecht als 1 damit vollständig gelöst.

Bekannte Tatsachen.

1. Unter einer *Cremona-Transformation* versteht man eine umkehrbar rationale Abbildung

$$\xi = f_1(x, y, z)$$
$$\eta = f_2(x, y, z)$$
$$\zeta = f_3(x, y, z)$$

der (x, y, z)-Ebene auf die (ξ, η, ζ)-Ebene. f_1, f_2, f_3 seien hierbei homogene Polynome etwa vom n. Grade. n heißt dann der Grad der Transformation.

2. Punkte, in denen f_1, f_2, f_3 gleichzeitig verschwinden, heißen *Fundamentalpunkte* der Transformation. Ihnen entsprechen, je nach der Auffassung, in der (ξ, η, ζ)-Ebene entweder gar keine Punkte oder ganze Kurven, die *Fundamentalkurven* der Transformation.

3. Gehen alle Kurven $f_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ k-fach durch einen Punkt P, so heißt P ein k-facher Punkt der Transformation. Zwischen den Vielfachheiten i_ν der Fundamentalpunkte und dem Grad n bestehen die Beziehungen:

$$\sum_\nu i_\nu^2 = n^2 - 1 \qquad \sum_\nu i_\nu = 3(n - 1)$$

4. Eine Transformation heißt *Jonquières-Transformation*, wenn sie einen $(n-1)$-fachen Fundamentalpunkt, den *Scheitel*, und $2n - 2$ einfache Fundamentalpunkte hat. Verlegen wir den Scheitel in den Punkt $x = z = 0$ und gehen zu inhomogenen Koordinaten über, so können wir eine Jonquières-Transformation mittels einer Kollineation auf die Gestalt

$$\xi = x$$
$$\eta = \frac{\alpha(x)y + \beta(x)}{\gamma(x)y + \delta(x)}$$

bringen, wobei α, β, γ, δ Polynome in x sind.

5. Von besonderer Wichtigkeit sind die *quadratischen Transformationen*. Eine solche hat *drei* einfache Fundamentalpunkte. Die Fundamentalkurven sind *Geraden*. Hat eine Kurve n. Grades in den Fundamentalpunkten die Vielfachheiten i_1, i_2, i_3, so hat ihr Bild den Grad $2n - i_1 - i_2 - i_3$ und in den Fundamentalpunkten der inversen Transformation die Vielfachheiten $n - i_2 - i_3$, $n - i_3 - i_1$, $n - i_1 - i_2$.

6. Bilder von Kurven, die durch einen bestimmten Punkt einer Fundamentalgeraden gehen, gehen in einer bestimmten *Richtung* durch den entsprechenden Fundamentalpunkt.

I. Analytischer Teil.

Die singulären Punkte.

Zunächst sei einiges über die Gestalt der singulären Punkte gesagt. Eine ausführliche Darstellung findet sich z. B. bei Enriques-Chisini, Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche, Bd. II.

Wir nennen einen Punkt *gewöhnlich*, wenn er durch seine Koordinaten zu kennzeichnen ist.

Nach einem Satz von Noether läßt sich jede algebraische Kurve durch eine Reihe von quadratischen Transformationen in eine Kurve überführen, die in ihren vielfachen Punkten getrennte Tangenten hat, und so werden wir am vorteilhaftesten die weitere Einteilung der Punkte nach ihrem Verhalten gegenüber quadratischen Transformationen einführen.

Sei $Q\begin{Bmatrix} x = \eta\zeta \\ y = \zeta\xi \\ z = \xi\eta \end{Bmatrix}$ eine quadratische Transformation mit drei gewöhnlichen Fundamentalpunkten. Alle Kurven der x-y-z-Ebene, deren Bilder in der ξ-η-ζ-Ebene durch einen bestimmten, von den Fundamentalpunkten verschiedenen, gewöhnlichen Punkt Π_1 einer Fundamentalgeraden $\eta = 0$ gehen, gehen in einer bestimmten Richtung durch den zugehörigen Fundamentalpunkt $P_0(x = z = 0)$, also sozusagen außer durch P_0 noch durch einen unendlich benachbarten Punkt. Diese Bezeichnung ist durch die Vorstellung entstanden, daß zwei an und für sich getrennte Punkte in der Grenze zusammengerückt sind. Dann ist kein Punkt vor dem andern ausgezeichnet; bei der hier angegebenen Entstehungsweise ist aber der Fundamentalpunkt der quadratischen Transformation vor dem andern ausgezeichnet, und so wollen wir sagen, P_1 *folge auf* P_0 *unmittelbar und in erster Linie*, P_0 *gehe* P_1 *unmittelbar und in erster Linie voran.*

Folgt in der ξ-η-ζ-Ebene ein Punkt Π_n auf Π_1 in $(n-1)$. Linie, so hat es Sinn zu definieren, daß auch sein Bild P_n in der x-y-z-Ebene *auf* P_1 *in* $(n-1)$.*Linie* und *auf* P_0 *in* n. Linie *folge*. P_0 gehe dann P_n in n. Linie voran.

Liegt nun in der ξ-η-ζ-Ebene ein auf Π_1 unmittelbar und in erster Linie folgender Punkt Π_2 ebenfalls auf den Fundamentalgeraden $\eta = 0$, so wollen wir sagen, sein Bild P_2 *folge* in der x-y-z-Ebene außer auf P_1 auch *auf* P_0 *unmittelbar*, (freilich, da Π_2 kein gewöhnlicher Punkt ist, nicht in erster, sondern in zweiter Linie), P_2 *sei ein Satellit von* P_1, P_0 führe P_2, P_1 habe P_2 als Satelliten. Ein Kurvenzweig, der durch P_2 hindurch-

geht, hat P_0 als mehrfachen Punkt, kann insbesondere keine Gerade sein; P_2 kann also niemals durch eine nochmalige quadratische Transformation in die unmittelbare Folge eines dritten Punktes gebracht werden.

Ebenso können auch n aufeinander und auf P_1 folgende Punkte $P_2, P_3, \ldots, P_{n+1}$ gleichzeitig auf P_0 unmittelbar und in 2., 3., . . ., $(n+1)$. Linie folgen und 1. 2. . . . n. Satellit von P_1 (aber nicht voneinander) sein. Ein Punkt, der nicht Satellit irgend eines anderen Punktes ist, heißt ein *freier Punkt.*

Geht durch eine Reihe von aufeinanderfolgenden Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ein und derselbe Zweig irgendeiner Kurve, so wollen wir zur Abkürzung sagen, $P_1, P_2, \ldots P_n$ bilden einen *Zweig* oder liegen auf einem Zweig.

Satz 1. *Die Vielfachheit i_0 einer Kurve C_n vom Grade n in einem Punkt P_0 ist gleich der Summe der Vielfachheiten in den auf P_0 unmittelbar folgenden Punkten.*

Seien i_1 und i_2 die Vielfachheiten von C_n in den Fundamentalpunkten $(y = x = 0)$ und $(y = z = 0)$. Dann ist der Grad des Bildes von C_n in der ξ-η-ζ-Ebene gleich $2n - i_0 - i_1 - i_2$, und seine Vielfachheiten in den Punkten $(\eta = \xi = 0)$ und $(\eta = \zeta = 0)$ sind $n - i_0 - i_1$ und $n - i_0 - i_2$. Die Fundamentalgerade $\eta = 0$ schneidet also das Bild von C_n außer in den Fundamentalpunkten noch i_0-mal; i_0 ist also die Summe der Vielfachheiten der Kurve in den in der x-y-z-Ebene unmittelbar auf P_0 folgenden Punkten.

Geht insbesondere eine Kurve durch einen Punkt P, so geht sie auch durch alle Punkte, die P vorangehen.

Die Segre-Transformation.

Eine Jonquières-Transformation n. Grades mit dem Scheitel O_0 und den einfachen Fundamentalpunkten $O_1, O_2, \ldots . O_{2n-2}$ heiße nun eine *Segre-Transformation*, wenn für $\mu > \nu$; $\mu, \nu = 0, 1 \ldots (2n-2)$ O_μ auf O_ν in $(\mu - \nu)$. Linie folgt und wenn $O_2, \ldots O_{n-1}$ Satelliten von O_1, aber $O_n, O_{n+1}, \ldots O_{2n-2}$ freie Punkte sind.

Eine Segre-Transformation ist durch Angabe der Fundamentalpunkte bis auf Kollineationen *eindeutig bestimmt*, und läßt sich bei geeigneter Wahl der beiden Koordinatensysteme auf die folgende Normalform bringen:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \xi &= x z^{n-1} \\ \eta &= y z^{n-1} + \sum_0^n a_\nu x^{n-\nu} z^\nu \\ \zeta &= z^n . \end{aligned}$$

Denn die Gleichung der allgemeinen C_n, die in $x = z = 0$ einen $(n-1)$-fachen Punkt hat und durch $O_1, O_2, \ldots O_{n-1}$ hindurchgeht, lautet:

$$y z^{n-1} - \sum_0^n a_\nu x^{n-\nu} z^\nu = 0$$

wobei die Koeffizienten a_ν noch unbestimmt sind (mit der Einschränkung $a_0 \neq 0$, denn sonst zerfiele die Kurve). Durch die Bedingung, daß die Kurve außer durch $O_1, O_2, \ldots,$ $O_{n+\nu-1}$ auch durch $O_{n+\nu}$ hindurchgehe, wird der Koeffizient a_ν festgelegt, so daß, wenn die Kurve durch alle Fundamentalpunkte hindurchgehen soll, nur noch die beiden letzten Koeffizienten a_{n-1} und a_n unbestimmt bleiben. Die allgemeine Form der Kurven, die durch die Segre-Transformation in Geraden $\varkappa\xi + \lambda\eta + \mu\zeta = 0$ übergehen, lautet demnach

$$\varkappa x z^{n-1} + \lambda(y z^{n-1} + \sum_{0}^{n_i} a_\nu x^{n-\nu} z^\nu) + \mu z^n = 0$$

wobei die Koeffizienten a_ν fest sind.

Segre[1]) hat im Jahre 1901 zuerst bemerkt, daß sich die Segre-Transformationen ohne Zuhilfenahme willkürlicher fremder Punkte nicht in quadratische Transformationen zerlegen lassen.

Die Umkehrung einer Segre-Transformation ist wieder eine Segre-Transformation:

$$\text{(1a)} \qquad \begin{aligned} x &= \xi \zeta^{n-1} \\ y &= \eta \xi^{n-1} - \sum_{0}^{n} a_\nu \xi^{n-\nu} \zeta^\nu \\ z &= \zeta^n \end{aligned}$$

Einen auf O_0 folgenden Fundamentalpunkt P einer Jonquières-Transformation J, der als Fundamentalpunkt einer Segre-Transformation aufgefaßt werden könnte, wollen wir im folgenden einen *Segre-Punkt von J* nennen; im gegenteiligen Falle heiße P ein *Nicht-Segre-Punkt von J*. Folgt P auf ein vollständiges System von Segre-Punkten, so heiße P ein *Nach-Segre-Punkt von J*. Folgt P auf O_0 und kommt unter den ihm vorangehenden Punkten kein nicht von O_0 geführter Satellit vor, so ist demnach P entweder ein Segre-Punkt oder ein Nach-Segre-Punkt.

Die ganze Jonquières-Transformation.

Nach Satz 1 kann eine Kurve höchstens durch $(n-1)$ auf O unmittelbar folgende Punkte hindurchgehen, wenn der Punkt O ein $(n-1)$-facher Punkt für sie ist. Es können also höchstens $(n-1)$ einfache Fundamentalpunkte einer Jonquières-Transformation n. Grades auf den Scheitel unmittelbar folgen. Wird diese Zahl wirklich erreicht, so wollen wir die betreffende Transformation eine *ganze Jonquières-Transformation* nennen.

Legen wir den Scheitel einer ganzen Jonquières-Transformation in den Punkt $x = z = 0$ und den Scheitel der inversen Transformation in den Punkt $\xi = \zeta = 0$, so können wir die gegebene Transformation auf die Form bringen:

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} \xi &= x A_{n-1}(x, z) \\ \eta &= y B_{n-1}(x, z) + C_n(x, z) \\ \zeta &= z A_{n-1}(x, z) \end{aligned}$$

wo A, B, C homogene Polynome sind.

Denn durch die Forderung, daß eine Kurve durch $(n-1)$ auf den Scheitel unmittelbar folgende Punkte hindurchgehe, sind die $(n-1)$ Verhältnisse der Koeffizienten der in y linearen Glieder festgelegt. Für alle Kurven, die durch die Transformation in Gerade übergehen sollen, sind diese Verhältnisse dieselben. Durch geeignete Wahl der Basiskurven kann man also der Transformation die angegebene Gestalt geben.

Umgekehrt stellt jede solche Form eine ganze Jonquières-Transformation dar.

Die inverse Transformation zu einer ganzen Jonquières-Transformation ist wieder eine ganze Jonquières-Transformation

$$\text{(2a)} \qquad \begin{aligned} x &= \xi B_{n-1}(\xi, \zeta) \\ y &= \eta \cdot A_{n-1}(\xi, \zeta) - C_n(\xi, \zeta) \\ z &= \zeta B_{n-1}(\xi, \zeta) \end{aligned}$$

---

[4]) Torino Atti 36 pg. 645.

Setzen wir $z = \zeta = 1$, so erhalten wir folgende inhomogene Form

$$\xi = x$$
$$\eta = b(x) \cdot y + c(x)$$

wo b und c rationale Funktionen sind. Hier ist die Bezeichnung „ganze" Jonquières-Transformation hergenommen.

Sind $A = B = z^{n-1}$, so wird $b = 1$ und c ganz. Wir haben dann eine Segre-Transformation vor uns.

Existenz der Jonquières-Transformation mit gegebenen Fundamentalpunkten.

Eine Jonquières-Transformation mit dem Scheitel in O_0 und den einfachen Fundamentalpunkten $O_1, O_2, \ldots\ldots O_{2n-2}$ ist nicht möglich:

a) wenn alle Kurven n.Grades, die $(n-1)$-fach durch O_0 und einfach durch die übrigen Fundamentalpunkte hindurchgehen, *zerfallen und einen allen gemeinsamen festen Bestandteil haben.* Dies ist der Fall:

α) wenn $(n + \nu)$ Fundamentalpunkte auf einer Kurve ν.Grades liegen, die $(\nu - 1)$-fach durch den Scheitel geht.

β) wenn der Scheitel mit zwei Fundamentalpunkten auf einer Geraden liegt.

b) wenn es gar keine Kurven n.Grades gibt, die $(n-1)$-fach durch den Scheitel und einfach durch die übrigen Fundamentalpunkte geht, weil jede solche Kurve im *Widerspruch zu Satz* 1 stünde. Dies ist der Fall:

α) wenn ein Punkt in der Reihe der Fundamentalpunkte vorkommt, ein ihm vorangehender nicht.

β) wenn der Scheitel kein gewöhnlicher Punkt ist.

γ) wenn mehr als ein Fundamentalpunkt einem einfachen Fundamentalpunkt unmittelbar folgen.

Z. B. wenn ein nicht vom Scheitel geführter Satellit vorkommt.

δ) wenn mehr als $(n-1)$ Fundamentalpunkte unmittelbar auf den Scheitel folgen. Diese Fälle wollen wir im folgenden die *Verbote* nennen.

Es kann nie vorkommen, daß ein System von Punkten, das das Fundamentalpunktsystem einer ganzen Jonquières-Transformation sein könnte, das Verbot a) α) übertritt. Denn es mögen etwa $O_1, O_2, \ldots O_{n-1}$ auf O_0 unmittelbar, $O_n, O_{n+1}, \ldots O_{2n-2}$ auf O_0 nicht unmittelbar folgen und die Verbote a) β) und b) beachten. Eine Kurve ν.Grades, die $(\nu - 1)$-fach durch O_0 geht, kann höchstens durch $(\nu - 1)$ auf O_0 unmittelbar folgende Punkte gehen, müßte also, um das Verbot a) α) zu übertreten, noch durch $(n + 1)$ von den nicht auf O_0 unmittelbar folgenden Punkten gehen. Aber soviele gibt es gar nicht.

Satz 2. *Beachtet ein System von Punkten die Verbote, so gibt es eine Jonquières-Transformation, die die Punkte des Systems zu Fundamentalpunkten hat.*

Zum Beweise benutzen wir noch einen Hilfssatz:

Sei $O_0; O_1, O_2, \ldots O_{2n-2}$ ein System s von Punkten der Ebene $\mathfrak{E}$, das die Verbote beachtet. Die quadratische Transformation Q mit den Fundamentalpunkten O_0, P_1, P_2 möge die Ebene $\mathfrak{E}$ in die Ebene $\mathfrak{E}'$ überführen. Alle Kurven, die durch einen Fundamentalpunkt O_0 bzw. P_1 bzw. P_2 hindurchgehen und deren Grad durch Q nicht geändert wird, schneiden sich nach Ausführung von Q wieder in einem Fundamentalpunkt von

Q^{-1}, den wir O_0' bzw. P_1' bzw. P_2' nennen wollen. Ein von den Fundamentalpunkten verschiedener Punkt O_ν gehe durch Q in O_ν' über. Ist P_ν einer der beiden Punkte P_1 oder P_2, so wollen wir den andern mit $P_{\nu+1}$ bezeichnen.

Wir betrachten nun das Punktsystem s' in der Ebene $\mathfrak{E}'$, das aus folgenden Punkten besteht:

1. Aus O_0'
2. Aus P_ν', falls $P_{\nu+1}$ nicht zum System s gehört.
3. Aus den Bildern der von P_1 und P_2 verschiedenen Punkte von s.

Die Behauptung des Hilfssatzes ist nun: *Auch das System s' beachtet die Verbote.* Es sei μ die Anzahl der Punkte P_1P_2, die dem System s angehören. Die Jonquières-Transformation, deren Fundamentalpunkte die Punkte von s' sein sollen, wäre dann vom Grade $(n+1-\mu)$. Angenommen, das Verbot *a*) α) werde von s' nicht beachtet. Es gäbe eine Kurve vom ϱ.Grade, die $(\varrho-1)$-fach durch den Scheitel und durch $(n+\varrho-\mu+1)$ einfache Punkte von s' ginge. Sie gehe etwa durch ν von den Punkten $P_1'P_2'$, die zu s' gehören, durch π von diesen Punkten, die nicht zu s' gehören. Nach Ausführung von Q^{-1} wäre ihr Bild vom Grade $(\varrho+1-\nu-\pi)$, ginge $(\varrho-\nu-\pi)$-fach durch den Scheitel und durch

$$(n+\varrho-\mu+1)-\nu+(\mu-\pi)=n+(\varrho+1-\nu-\pi)$$

einfache Punkte des Systems s, was dem Verbot a) α) zuwiderliefe.

In einem Fall können wir diesen Schluß nicht ziehen: wenn die betrachtete Kurve die Gerade $P_1'P_2'$ war. Aber angenommen, sie ginge durch $(n+2-\mu)$ Punkte von s', d. h. durch n von den Punkten $P_1'P_2'$ verschiedene Punkte von s' (da $(2-\mu)$ von den Punkten $P_1'P_2'$ zu s' gehören). Die Urbilder dieser n Punkte in der Ebene $\mathfrak{E}$ würden auf O_0 unmittelbar folgen, was dem Verbot b) δ) widersprechen würde.

Das Verbot a) β) ist beachtet. O_0' kann nicht mit zwei Punkten O_1' und O_2' von s' auf einer Geraden g liegen. Zum Beweis müssen wir drei Fälle unterscheiden:

1. Die Gerade g geht nicht durch P_1' oder P_2'. Ihr entspricht in der Ebene $\mathfrak{E}$ ebenfalls eine Gerade durch $O_0\,O_1\,O_2$, was aber dem Verbot a) β) widersprechen würde.

2. Die Gerade geht etwa durch P_1', aber P_1' gehört nicht zu s'. Dann gehört P_2 zu s, aber O_1 und O_2 folgen auf P_2 unmittelbar, was dem Verbot b) γ) zuwiderliefe.

3. Einer der beiden Punkte, etwa O_1', ist P_1'. Dann gehört P_2 nicht zu s, aber O_2 folgt unmittelbar auf P_2, entgegen dem Verbot b) α).

Das Verbot b) α) ist beachtet. Denn in der Folgebeziehung kann sich höchstens für die Punkte P_1P_2 etwas geändert haben. Bilder von Punkten des Systems s, die auf P_1 oder P_2 folgten, folgen nicht mehr auf P_1' bzw. P_2'. Das Urbild eines Punktes R, der auf P_ν' folgt, muß auf der Geraden $O_0\,P_{\nu+1}$ gelegen haben. Gehört R zu s, so kann $P_{\nu+1}$ wegen a) β) nicht zu s gehören, P_ν' gehört also zu s', s' beachtet also das Verbot b) α).

Auf der Geraden $O_0P_{\nu+1}$ kann aber höchstens ein Punkt von s liegen, also kann auf P nur ein Punkt von s' unmittelbar folgen. Das Verbot b) γ) ist also ebenfalls beachtet.

Das Verbot b) β) ist beachtet. O_0' ist ein gewöhnlicher Punkt.

Das Verbot *b*) δ) ist beachtet, denn wenn sich an der Differenz der Anzahlen der auf O_0 unmittelbar und der auf O_0 nicht unmittelbar folgenden Punkte etwas geändert haben soll, darf keiner der Punkte P_1P_2 auf O_0 folgen. Sollen nach Ausführung von Q mehr als $(n-\mu)$ Punkte von s' auf O_0' unmittelbar folgen, so müssen mehr als $n-\mu$ von den Punkten P_1P_2 verschiedene, oder mehr als n Punkte von s auf der Geraden P_1P_2 gelegen haben, was dem Verbot a) α) widerspricht. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Wir kehren nun zu dem Satze 2 zurück. Er gilt zunächst für ein System von 3 Punkten, die als Fundamentalpunkte einer *quadratischen Transformation* aufgefaßt werden sollen. Liegen sie nicht auf einer Geraden, (Verbot a), kommt unter den drei Punkten zu jedem Punkt jeder ihm vorangehende vor (Verbot b) α)) und folgen nicht zwei von ihnen unmittelbar auf den dritten (Verbot b) γ) und δ)) so gibt es durch die drei Punkte ein Netz von nicht ausgearteten Kegelschnitten.

Angenommen, wir hätten Satz 2 schon für Jonquières-Transformationen $(n-1)$. Grades bewiesen, und es sei $O_0; O_1, O_2, \ldots O_{2n-2}$ ein System s von Punkten in der Ebene $\mathfrak{E}$, das die Verbote beachtet. Folgt nun einer der Punkte des Systems, etwa O_1, nicht auf O_0, so gibt es eine quadratische Transformation Q mit den Fundamentalpunkten O_0, O_1 und einem weiteren Punkt O_2 des Systems. Q führe die Ebene $\mathfrak{E}$ in eine Ebene $\mathfrak{E}'$ über. Sei s' das in der im Hilfssatz angegebenen Weise zusammengesetzte Punktsystem in der Ebene $\mathfrak{E}'$. In unserem Falle ist $\mu = 2$; eine Jonquières-Transformation, deren System von Fundamentalpunkten s' ist, ist vom $(n-1)$.Grade. Nach der Induktionsvoraussetzung, und da nach dem Hilfssatz s' die Verbote beachtet, existiert jene Jonquières-Transformation; es gibt ein Netz von Kurven $(n-1)$.Grades, die $(n-2)$-fach durch O_0' und einfach durch die übrigen Punkte von s' gehen. Ihm entspricht in der Ebene $\mathfrak{E}$ ein Netz von Kurven n.Grades, die $(n-1)$-fach durch O_0 und einfach durch die übrigen Fundamentalpunkte gehen.

Es sei nun s ein System von Punkten, in dem alle einfachen Punkte auf O_0 folgen. Es möge O_1 auf O_0 unmittelbar und in erster Linie folgen. P sei ein willkürlicher, gewöhnlicher, nicht auf der Geraden O_0O_1 liegender Punkt; Q sei die quadratische Transformation mit den Fundamentalpunkten O_0O_1P. Wir bilden wieder das System s' in der Ebene $\mathfrak{E}'$. Es beachtet die Verbote. Der Punkt P' gehört dazu und folgt nicht auf O_0'. Für s' gilt also der Satz 2, und wir können genau wie eben schließen, daß er auch für das System s gilt. Damit ist der Satz in allen Stücken bewiesen.

Jonquières-Transformation von Kurven.

Es seien O_0 und P_0 die Scheitel, $O_1, O_2, \ldots O_{2m-2}$ und $P_1, P_2, \ldots P_{2m-2}$ die einfachen Fundamentalpunkte zweier zueinander inverser Jonquières-Transformationen m.Grades J und J' der beiden Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ aufeinander. Eine Kurve C habe in $\mathfrak{E}$ den Grad n und im O_ν die Vielfachheit i_ν, ihr Bild in $\mathfrak{E}'$ habe den Grad n' und in P_ν die Vielfachheit i_ν'.

Es ist dann

$$(3) \quad n' = n + (m-1)(n-i_0) - \sum_1^{2m-2\mu} i_\mu = n + \sum_1^{2m-2\mu}\left(\frac{n-i_0}{2} - i_\mu\right) = n + S\,.$$

Denn dies ist die Anzahl der von den Fundamentalpunkten verschiedenen Punkte in $\mathfrak{E}$, in denen C diejenigen Kurven schneidet, die durch J in Geraden übergehen. Die Summe $S = \sum_1^{2m-2\mu}\left(\frac{n-i_0}{2} - i_\mu\right)$ gibt also die Erhöhung des Grades an und ist deshalb von sehr großer Wichtigkeit für uns. Wir werden sie im folgenden einfach die *Summe S* nennen.

Weiter ist:

$$(4) \qquad n' - i_0' = n - i_0$$

Denn $n - i_0$ ist die Anzahl der Schnittpunkte von C mit einer Geraden g, die durch den Scheitel, aber durch keine weiteren Fundamentalpunkte von J geht. Das Bild von g ist wieder eine Gerade durch den Scheitel von J', geht durch keine einfachen Fundamentalpunkte von J', und schneidet das Bild von C in den $n - i_0$ Bildern der Schnittpunkte von g und C.

Ferner kann man die Punkte P_ν so umnumerieren, daß

$$i'_\mu = n - i_\mu - i_0 \tag{5}$$

Dies gilt zunächst für die quadratischen Transformationen. Dann gilt (5) für eine Jonquières-Transformation, wenn sie als Produkt von zwei Faktoren darstellbar ist, für deren jeden (5) gilt, gleichgültig, ob die beiden Faktoren einen Fundamentalpunkt gemein haben oder nicht. Nun können wir nach Alexander und Chisini jede Jonquières-Transformation in quadratische Transformationen zerlegen, womit (5) bewiesen ist.

Wir wollen eine Jonquières-Transformation J_1 einen *Teiler* einer anderen Jonquières-Transformation J nennen, wenn der Grad von J_1 geringer ist als der von J, und wenn alle Fundamentalpunkte von J_1 auch Fundamentalpunkte von J sind.

Wir haben jetzt die Mittel, um einen Teil unseres Problems zu behandeln: *Unter welchen Umständen kann der Grad einer Kurve C durch eine Jonquières-Transformation erniedrigt werden*? Wir wollen dafür einige notwendige Bedingungen angeben. Daß sie hinreichen, ist dann trivial, denn sie bestehen darin, daß schon Jonquières-Transformationen mit bestimmten Eigenschaften den Grad erniedrigen müssen.

Es sei also C eine Kurve n.Grades, J eine Jonquières-Transformation, die den Grad von C erniedrigt. J habe den Scheitel O_0 und die einfachen Fundamentalpunkte $O_1, O_2, \ldots$; im Punkte O_ν habe C die Vielfachheit i_ν. Wir setzen voraus, daß J keine quadratische Transformation sei, (diesen Fall hat Marletta erschöpfend behandelt), und daß kein Teiler von J den Grad von C erniedrigt.

Satz 3. *In allen Nicht-Segre-Punkten von J hat C keine größere Vielfachheit als* $\frac{n - i_0}{2}$.

Angenommen, der Satz sei nicht richtig, es gäbe einen Nicht-Segre-Punkt, etwa O_1, in dem C eine Vielfachheit $i_1 > \frac{n - i_0}{2}$ hätte. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Erstens: O_1 *folgt nicht auf* O_0; dann können wir annehmen, O_1 sei ein gewöhnlicher Punkt, denn sonst könnten wir O_1 durch einen vorangehenden ersetzen. Da die Summe $S < 0$, gibt es einen Punkt O_2, so daß auch

$$\left(\frac{n - i_0}{2} - i_1\right) + \left(\frac{n - i_0}{2} - i_2\right) = (n - i_0 - i_1 - i_2) < 0$$

O_0, O_1, O_2 lassen sich dann als Fundamentalpunkte einer quadratischen Transformation auffassen, die den Grad von C erniedrigt, was wir ausgeschlossen haben.

Zweitens: O_1 *folgt auf* O_0; dann kann O_0 als Fundamentalpunkt einer Jonquières-Transformation nur Nach-Segre-Punkt sein; es geht ihm ein vollständiges System von Fundamentalpunkten einer Segre-Transformation J_1 voran. In jedem dieser Punkte hat C ebenfalls eine Vielfachheit $> \frac{n - i_0}{2}$. J_1 erniedrigt also den Grad von C und ist Teiler von J, was wir ausgeschlossen haben.

Satz 4: *J ist eine ganze Jonquieres-Transformation.*

Nehmen wir wieder im Gegenteil an, die Anzahl ν der auf O_0 nicht unmittelbar folgenden Fundamentalpunkte von J sei größer als die Anzahl μ der unmittelbar auf O folgenden. $\nu + \mu =$ der Gesamtzahl und somit auch $\nu - \mu$ sind gerade. Es gibt unter den einfachen Fundamentalpunkten mindestens $\nu - \mu$ Nicht-Segre-Punkte; denn auf die μ auf O_0 unmittelbar folgenden Punkte folgen höchstens ebensoviele freie Segre-Punkte. Der Beitrag, den jene $(\nu - \mu)$ Nicht-Segre-Punkte zu S liefern, ist nicht negativ. Wenn wir nun aus der Liste der Fundamentalpunkte von J $(\nu - \mu)$ solche von diesen

Punkten streichen, auf die kein verbleibender Fundamentalpunkt von J mehr folgt, so bleibt S negativ. Die verbleibenden Fundamentalpunkte beachten die Verbote und lassen sich als Fundamentalpunkte einer ganzen Jonquières-Transformation J' auffassen. J' würde den Grad von C erniedrigen und Teiler von J sein, was nicht möglich ist.

Satz 5: *Die Summe S, erstreckt über die auf O unmittelbar folgenden Fundamentalpunkte von J ist negativ.*

Angenommen, es gäbe ein System von $\nu + \mu$ aufeinander und auf O_0 folgenden Fundamentalpunkten von J, in denen C eine kleinere Vielfachheit als $\frac{n - i_0}{2}$ hat; und zwar mögen ν von ihnen auf O_0 unmittelbar folgen, μ hingegen nicht. Es sei $\nu \geqq \mu$. Auf den letzten von ihnen möge kein weiterer Fundamentalpunkt von J mehr folgen.

Es gibt dann mindestens $(\nu - \mu)$ Nicht-Segre-Punkte von J, und die Vielfachheit von C ist nach Satz 3 in diesen Punkten nicht größer als $\frac{n - i_0}{2}$. Wir streichen nun wieder $\nu - \mu$ solche von diesen Punkten, auf die kein weiterer Fundamentalpunkt von J mehr folgt, sowie die $\nu + \mu$ oben genannten Punkte aus der Liste der Fundamentalpunkte von J. Der Beitrag, den die gestrichenen Punkte zur Summe S lieferten, ist positiv, S wird also durch die Streichung nur verkleinert. Die verbleibenden Fundamentalpunkte beachten die Verbote und sind wieder Fundamentalpunkte einer ganzen Jonquières-Transformation $J_1 \cdot J_1$ ist Teiler von J und erniedrigt den Grad von C, was nicht möglich ist. Auf eine Reihe von auf O_0 unmittelbar folgenden Fundamentalpunkten, in denen C eine kleinere Vielfachheit als $\frac{n - i_0}{2}$ hat, folgt also immer noch eine Reihe von mindestens ebenso vielen Fundamentalpunkten.

Wir fassen jetzt immer je einen auf O_0 unmittelbar folgenden Fundamentalpunkt mit einem, der das nicht tut, in der Weise zu einem Paar zusammen, daß C in dem ersteren Punkt eine mindestens ebenso große Vielfachheit hat als in dem letzteren. Dies geschieht auf die folgende Weise:

1. Eine Reihe von ν aufeinander und auf O_0 unmittelbar folgenden Fundamentalpunkten, in denen C eine kleinere Vielfachheit als $\frac{n - i_0}{2}$ hat, können wir mit den darauf folgenden, nicht unmittelbar auf O_0 folgenden Punkten zusammenfassen.

2. Einer Reihe von ν aufeinander folgenden, aber auf O_0 nicht unmittelbar folgenden Fundamentalpunkten, in denen C eine größere Vielfachheit als $\frac{n - i_0}{2}$ hat, geht, da sie nach Satz 3 Segre-Punkte sind, eine Reihe von mindestens ebensovielen auf O_0 unmittelbar folgenden Punkten voran. ν von diesen können wir mit ihnen zu Paaren zusammenfassen.

Nach Satz 1 hat in diesen beiden Fällen die Kurve C in dem auf O_0 unmittelbar folgenden Punkt eines Paares eine mindestens ebensogroße Vielfachheit als in dem nicht auf O_0 unmittelbar folgenden Punkt.

3. In den übrigen Punkten hat C in jedem auf O_0 unmittelbar folgenden Punkt mindestens, in jedem nicht auf O_0 unmittelbar folgenden Punkt höchstens die Vielfachheit $\frac{n - i_0}{2}$. Diese Punkte können wir in beliebiger Weise zu Paaren zusammenfassen.

Die Summe S ist also, erstreckt über die auf O_0 unmittelbar folgenden Punkte, höchstens gleich der Summe S, erstreckt über die auf C_0 nicht unmittelbar folgenden Punkte. Da die Summe dieser beiden Teile negativ ist, ist der erste Teil negativ, was zu beweisen war.

Satz 6: *Ist J vom k.Grad, so ist*

$$i_0 > n\frac{k-1}{k+1} \tag{6}$$

$$k < \frac{n+i_0}{n-i_0}. \tag{7}$$

Denn wegen Satz 1 und 6 ist

$$i_0 \geqq \sum_1^k i_\nu > (k-1)\cdot\frac{n-i_0}{2}.$$

Da nun $k > 2$, ist $i_0 > \frac{n}{2}$, es kann also nur einen Punkt geben, der als Scheitel unserer Transformation J in Frage kommt. (7) ist dann eine Abschätzung für den Grad der in Frage kommenden Transformation, denn mit der Kurve C sind i_0 und n gegeben. Wir können also in endlich vielen Schritten feststellen, ob der Grad noch durch eine Jonquières-Transformation erniedrigt werden kann oder nicht.

Es sei bemerkt, daß wir in dieser ganzen Satzgruppe die Voraussetzung $S < 0$ ersetzen können durch die Voraussetzungen *S verschwinde und es gebe einen auf O_0 unmittelbar folgendem Fundamentalpunkt O_2 von J, in dem C eine größere Vielfachheit als $\frac{n-i_0}{2}$ hat.*

Satz 3 läßt sich dann sogar noch in der schärferen Form beweisen:

Satz 3 a. *In allen Nicht-Segre-Punkten ist die Vielfachheit von C kleiner als $\frac{n-i_0}{2}$.*

Denn angenommen, C hätte in dem Nicht-Segre-Punkt O_1 eine Vielfachheit $i_1 \geqq \frac{n-i_0}{2}$, und O_1 folgte nicht auf O_0, so können wir genau in der in Satz 3 angegebenen Weise zum Widerspruch gelangen; denn damals haben wir von der Tatsache $S < 0$ nur die Folgerung benutzt, daß es einen Punkt O_2 gebe, für den $i_0 + i_1 + i_2 > n$ sei.

Ist O_1 Nach-Segre-Punkt, so können wir annehmen, O_1 folge auf den letzten Segre-Punkt unmittelbar und in erster Linie. Wir bilden ein System s in folgender Weise: Scheitel sei O_0; es gehören weiter dazu O_1, O_2 und das O_1 vorangehende vollständige System von Segre-Punkten. s beachtet die Verbote, aber die Summe S, erstreckt über s, ist negativ. Es gäbe also einen Teiler von J, der den Grad erniedrigte.

In Satz 4 haben wir nur benutzt, daß S nach Streichung von gewissen Nicht-Segre-Punkten negativ würde. Das ist aber nach Satz 3 a auch hier der Fall.

In Satz 5 können wir auf die angegebene Möglichkeit der Zusammenfassung zu Paaren in derselben Weise schließen, da ja schon damals S durch die Streichung wirklich verkleinert wurde. Satz 5 könnte nur dann seine Gültigkeit unter den neuen Voraussetzungen verlieren, wenn die Kurve C in dem nicht auf O_0 folgenden Punkt jedes einzelnen Paares dieselbe Vielfachheit hätte wie in dem damit zusammengefaßten auf C unmittelbar folgenden Punkt. Nun werden nach Vorschrift 3) alle Nicht-Segre-Punkte, in denen ja C nach Satz 3 *a* eine kleinere Vielfachheit als $\frac{n-i_0}{2}$ hat, mit auf O_0 unmittelbar

folgenden Punkten zusammengefaßt, in denen C mindestens die Vielfachheit $\frac{n-i_0}{2}$ hat. In unserem Ausnahmefall dürfen also keine Nicht-Segre-Punkte vorkommen, und J zerfällt in Segre-Transformationen. Sei J_1 die Segre-Transformation, die O_2 zum Fundamentalpunkt hat. Es muß dann einen freien Fundamentalpunkt O_r geben, in dem C ebenfalls die Vielfachheit i_2 hat. Folglich ist die Vielfachheit von C in allen O_r vorangehenden, auf O_0 unmittelbar folgenden Punkten und folglich auch in den übrigen Fundamentalpunkten von J_1 ebenfalls i_2. J_1 würde also den Grad erniedrigen, was nicht möglich ist.

Satz 6 als einfache Folge der Sätze 3—5 gilt dann natürlich auch unter den neuen Voraussetzungen.

Unter den alten, jedoch nicht unter den neuen Voraussetzungen gilt noch folgendes:

Satz 7. *Es kann nicht sein, daß nach Streichung des vollständigen Systems der einfachen Fundamentalpunkte eines Teilers J_1 von J aus der Liste der Fundamentalpunkte von J ein System s' von Punkten übrigbleibt, das die Verbote beachtet*, also als System der Fundamentalpunkte eines weiteren Teilers J_2 von J aufgefaßt werden kann. Denn die Summe S wäre entweder für s oder für s' negativ, da die Gesamtsumme negativ war. Entweder J_1 oder J_2 würden also den Grad erniedrigen, was nicht möglich ist.

Wir werden im II. Teil J als Produkt seiner Teiler J_1 und J_2 ansehen. In dem hier als unmöglich nachgewiesenen Falle wären dann die beiden Faktoren vertauschbar.

Der Zerlegungssatz.

Clifford [1]), Rosanes [2]) und Noether [3]) haben zuerst den Satz ausgesprochen, daß sich eine beliebige Cremona-Transformation in ein Produkt von quadratischen Transformationen zerlegen lasse, und zwar sollen alle Fundamentalpunkte aller vorkommenden quadratischen Transformationen schon Fundamentalpunkte der zu zerlegenden Cremona-Transformationen sein. Segre [4]) gab dann ein Beispiel, für das der Satz in dieser scharfen Form falsch ist: eben jene oben besprochenen Segre-Transformationen lassen sich ohne Zuhilfenahme *willkürlicher*, d. h. unter den Fundamentalpunkten der gegebenen Transformation nicht vorkommender Punkte nicht weiter zerlegen.

Castelnuovo [5]) sprach dann den Satz aus, daß sich jede Cremona-Transformation unter alleiniger Benutzung der vorhandenen Fundamentalpunkte in *quadratische* und *Jonquières-Transformationen* zerlegen lasse. Er glaubte dabei auf die Noetherschen Abschätzungen verzichten zu können. Er führte dann noch die Zerlegbarkeit jeder Jonquières-Transformationen in quadratische Transformationen mit Zuhilfenahme willkürlicher Punkte analytisch durch.

Die ersten stichhaltigen Beweise des Zerlegungssatzes sind von Chisini [6]) und Alexander [7]). Sie führten die Zerlegung in quadratische Transformationen mit Zuhilfenahme willkürlicher Punkte durch. Chisini schreitet im wesentlichen auf dem im letzten Teil der Castelnuovoschen Arbeit angedeuteten Wege vor, benutzt aber wesent-

---

[1]) Math. Papers 538.
[2]) Crelles Journ. 73 pg. 97.
[3]) Math. Ann. 3 pg. 161, 5 pg. 635.
[4]) Torino Atti 36 pg. 645.
[5]) Torino Atti 36 pg. 861.
[6]) Modena Atti (5) 6 pg. 7.
[7]) Amer. math. soc. trans. 17 pg. 295.

lich die Noetherschen Abschätzungen. Alexander gibt die Zerlegung in quadratische Transformationen mit lauter *gewöhnlichen* Fundamentalpunkten.

Für unsere Untersuchungen wäre aber die Notwendigkeit einer Einführung willkürlicher Punkte äußerst störend, und so sei hier der Versuch unternommen, den von Castelnuovo ausgesprochenen Gedanken unter Benutzung der Noetherschen Abschätzungen auf dem von Chisini beschrittenen Wege durchzuführen. Wir werden dabei weder von der Chisinischen Zerlegung unmittelbar Gebrauch machen, noch von der Formel (5), zu deren Ableitung wir ja die Chisinische Zerlegung nötig hatten.

Wir wollen also beweisen:

Satz 8. *Wenn es keine quadratische Transformation gibt, die den Grad von T erniedrigt, und deren Fundamentalpunkte schon Fundamentalpunkte der zu zerlegenden Transformation T waren, so gibt es eine ganze Jonquières-Transformation mit diesen Eigenschaften.*

Dies beweisen wir auf dem von Castelnuovo beschrittenen Wege. Sei O_0 der Punkt, in dem T ihre höchste Vielfachheit i_0 hat; seien $O_1^{(1)}, O_2^{(1)}, \ldots O_k^{(1)}$ die auf O_0 unmittelbar folgenden Punkte, $O_1^{(2)}, O_2^{(2)}, \ldots O_l^{(2)}$ die nicht auf O_0 unmittelbar folgenden Punkte in denen T eine Vielfachheit $i_\mu^{(\nu)} > \frac{n - i_0}{2}$ hat. Dann wollen wir beweisen: $k \leqq l$. Wir setzen $i_\mu^{(\nu)} = \frac{n - i_0}{2}(1 + \varepsilon_\mu^{(\nu)})$. Nach Satz 1 ist dann:

$$i_0 \geqq \frac{n - i_0}{2} \sum_1^k{}_\mu (1 + \varepsilon_\mu^{(1)})$$

oder, wenn wir $k + \sum_1^k{}_\mu \varepsilon_\mu^{(1)} = K_0$ setzen,

$$(K_0 + 2) i_0 \geqq K_0 \cdot n$$

Es gilt dann auch für jedes $K \leqq K_0$

$$(K + 2) i_0 \geqq K \cdot n \tag{8}$$

da $i_0 < n$.

Nun benutzen wir die Noetherschen Abschätzungen. Es ist:

$$n^2 - 1 = i_0^2 + \sum_1^k{}_\mu \left(\frac{n - i_0}{2}\right)^2 (1 + \varepsilon_\mu^{(1)})^2 + \sum_1^l{}_\mu \left(\frac{n - i_0}{2}\right)^2 (1 + \varepsilon_\mu^{(2)})^2 + \sum_\mu j_\mu^2 \tag{9}$$

$$3(n - 1) = i_0 + \sum_1^k{}_\mu \frac{n - i_0}{2}(1 + \varepsilon_\mu^{(1)}) + \sum_1^l{}_\mu \frac{n - i_0}{2}(1 + \varepsilon_\mu^{(1)}) + \sum_\mu j_\mu \tag{10}$$

wobei j_μ die Vielfachheiten von T in den von den $O_\mu^{(\nu)}$ verschiedenen Punkten ist. Nach Definition der Punkte $O_\mu^{(\nu)}$ ist $j_\mu \leqq \frac{n - i_0}{2}$. Wir vergrößern also in Gleichung (7) jedes Glied von $\sum_\mu j_\mu^2$, wenn wir es durch $j_\mu \cdot \frac{n - i_0}{2}$ ersetzen. Dann ergibt sich aus (9) und (10)

$$1 \geqq \frac{n - i_0}{2}\left[3 i_0 - n + 3 - \frac{n - i_0}{2}\left(\sum_1^k{}_\mu \varepsilon_\mu^{(1)}(1 + \varepsilon_\mu^{(1)}) + \sum_1^l{}_\mu \varepsilon_\mu^{(2)}(1 + \varepsilon_\mu^{(2)})\right)\right] \tag{11}$$

Der Koeffizient von $(-n)$ in der Klammer ist hierbei

$$K_1 = 1 + \frac{1}{2}\sum_1^k{}_\mu \varepsilon_\mu^{(1)}(1 + \varepsilon_\mu^{(1)}) + \frac{1}{2}\sum_1^l{}_\mu \varepsilon_\mu^{(2)}(1 + \varepsilon_\mu^{(2)})$$

Der Koeffizient von i_0 ist $K_1 + 2$. Nun muß $K_1 > K_0$ sein, denn andernfalls wäre der Klammerausdruck in (11) wegen (8) mindestens 3, außerdem $\frac{n - i_0}{2} \geqq \frac{1}{2}$, also $1 \geqq \frac{3}{2}$, was nicht richtig ist. Es ist also

$$1 + \frac{1}{2}\sum_1^k{}_\mu \varepsilon_\mu^{(1)}(1 + \varepsilon_\mu^{(1)}) + \frac{1}{2}\sum_1^l{}_\mu \varepsilon_\mu^{(2)}(1 + \varepsilon_\mu^{(2)}) > k + \sum_1^k{}_\mu \varepsilon_\mu^{(1)}$$

Nun folgt aus $0 < \varepsilon_\mu^{(\nu)} \leqq 1$

$$\frac{1}{2}\sum_1^k{}_\mu \varepsilon_\mu^{(1)}(1 + \varepsilon_\mu^{(1)}) \leqq \sum_1^k{}_\mu \varepsilon_\mu^{(1)} (\leqq k)$$

ebenso

$$\frac{1}{2}\sum_1^l{}_\mu \varepsilon_\mu^{(2)}(1 + \varepsilon_\mu^{(2)}) \leqq l,$$

also $l > k - 1$.

Wir bilden nun dadurch ein Punktsystem s, daß wir aus der Gesamtheit der Punkte $O_\mu^{(2)}$ $l - k$ Punkte $O_\mu^{(2)}$ weglassen, doch so, daß wir außer einem Punkt auch alle auf ihn folgenden weggelassen haben. *Dann beachtet s die Verbote.*

a) α) ist beachtet, da k Punkte auf O unmittelbar folgen, also eine Jonquières-Transformation ganz sein müßte, die die Punkte aus s zu Fundamentalpunkten hat.

a) β) ist beachtet, denn wenn O mit zwei einfachen Punkten auf einer Geraden g läge, müßte g die Kurven, die vermöge T in Gerade übergehen, mehr als n-mal schneiden.

b) α) ist beachtet, denn wenn die Vielfachheit eines Punktes $\frac{n - i_0}{2}$ übersteigt, so übersteigt auch die Vielfachheit jedes ihm vorangehenden Punktes diese Größe. Daß wir den letzteren nicht weggestrichen haben, wurde Sorge getragen.

b) β) O_0 ist ein gewöhnlicher Punkt.

b) γ) Es können nicht auf einen Punkt $O_1^{(\nu)}$ zwei Punkte $O_2^{(\nu)}$ und $O_3^{(\nu)}$ unmittelbar folgen; denn die beiden letzteren haben je eine Vielfachheit $> \frac{n - i_0}{2}$, die Vielfachheit von $O_\mu^{(\nu)}$ müßte also $> n - i_0$ sein, was nicht möglich ist.

Daß b) δ) beachtet ist, war der wesentliche Inhalt der obigen Abschätzungen.

Es gibt also eine ganze Jonquières-Transformation mit dem Scheitel in O_0, deren sämtliche Fundamentalpunkte Punkte $O_\mu^{(\nu)}$ sind. Sie erniedrigt also den Grad von T. Damit ist der Satz bewiesen.

Die ganze Jonquières-Transformation ist nun weiter zerlegbar in quadratische ganze Jonquières-Transformationen und Segre-Transformationen, immer ohne Zuhilfenahme willkürlicher Punkte. Denn läßt sich keine quadratische Transformation mehr abspalten, so folgen alle Fundamentalpunkte auf O_0. Es muß nun eine Reihe von aufeinander folgenden und auf O_0 unmittelbar folgenden Punkten geben, auf die eine Reihe von mindestens ebenso vielen nicht unmittelbar auf O_0 folgenden Punkten folgt; denn es ist $l < k$ in unserer obigen Bezeichnung. Da diese Punkte wieder die Verbote beachten, lassen sie sich als Fundamentalpunkte einer Jonquières-Transformation, und zwar einer Segre-Transformation auffassen, die den Grad erniedrigt.

II. Teil. Die Gruppe [1]).

Wenn man bislang von Gruppen von Cremona-Transformationen sprach, verstand man unter dem *Produkt* zweier Transformationen

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= r_1(x, y, z) \\ \mathfrak{y} &= r_2(x, y, z) \\ \mathfrak{z} &= r_2(x, y, z) \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} x &= \varrho_1(\xi, \eta, \zeta) \\ y &= \varrho_2(\xi, \eta, \zeta) \\ z &= \varrho_3(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned}$$

die Transformation:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= r_1[\varrho_1(\xi, \eta, \zeta), \varrho_2(\xi, \eta, \zeta)\ \varrho_3(\xi, \eta, \zeta)] \\ \mathfrak{y} &= r_2[\varrho_1(\xi, \eta, \zeta), \varrho_2(\xi, \eta, \zeta)\ \varrho_3(\xi, \eta, \zeta)] \\ \mathfrak{z} &= r_3[\varrho_1(\xi, \eta, \zeta), \varrho_2(\xi, \eta, \zeta)\ \varrho_3(\xi, \eta, \zeta)] \end{aligned}$$

die durch Einsetzen der analytischen Ausdrücke ineinander entsteht. Dies ist eine *kontinuierliche* Gruppe. Aber wesentliche Eigenschaften der Cremona-Transformationen hängen von den metrischen Daten gar nicht ab (z. B. der Zerlegungssatz). Es sei daher versucht, die Gruppe so zu definieren, daß das *Diskrete*, die gegenüber Kollineationen invarianten Eigenschaften klarer herausgearbeitet werden. Für unsere Zwecke ist daher obige Produktdefinition nicht geeignet, wir werden mit einer wesentlich anderen Art der Verknüpfung arbeiten müssen. Dann dürfen wir aber eine Transformation nicht mehr durch ihren analytischen Ausdruck darstellen, denn dieser läßt keine andere Art der Verknüpfung zu. Wir werden sie im wesentlichen durch ihre Fundamentalpunkte bezeichnen. Zuvörderst müssen wir einiges über die Darstellung der Punkte sagen.

Die Punkte.

Für unsere Zwecke ist die Darstellung eines Punktes durch seine Koordinaten nicht geeignet, denn sie wäre nicht invariant gegenüber Kollineationen. Um einen bestimmten Punkt herauszugreifen und im Verlauf der Transformationen verfolgen zu können, denken wir uns alle Punkte (gewöhnliche Punkte und Punkte, die auf andere folgen), die im Laufe einer bestimmten Betrachtung eine Rolle spielen, *individualisiert und irgendwie* (*z. B. durch Numerierung*) *bezeichnet.* Diese Bezeichnung soll an einem Punkt P haften, wenn er durch eine Cremona-Transformation in einen Punkt Q einer andern Ebene übergeht; ist P aber Fundamentalpunkt der Cremona-Transformation, so geht er in keinen einzelnen Punkt der neuen Ebene über, und wir müssen hier eine besondere Festsetzung treffen. Da sich jede Cremona-Transformation in quadratische und Jonquières-Transformationen zerlegen läßt, genügt es, diese beiden zu betrachten.

Es seien die Punkte 1, 2, 3 in der Ebene $\mathfrak{E}$ die Fundamentalpunkte einer quadratischen Transformation Q der Ebene $\mathfrak{E}$ in eine Ebene $\mathfrak{E}'$. $1', 2', 3'$ in der Ebene $\mathfrak{E}'$ seien die Fundamentalpunkte der inversen Transformation. Die Bezeichnungen 1, 2, 3 sind noch auf keinen Punkt der Ebene $\mathfrak{E}'$ übergegangen; $1', 2', 3'$ sind Bilder keines Punktes der Ebene $\mathfrak{E}$ und tragen daher noch keine Bezeichnung. Wenn wir nun die Bezeichnungen 1, 2, 3 in irgendeiner Reihenfolge auf die Punkte $1', 2', 3'$ übertragen, dann sind alle Punkte von $\mathfrak{E}'$ bezeichnet, und jedes Symbol, das in $\mathfrak{E}$ einen Punkt bezeichnete, bezeichnet auch in $\mathfrak{E}'$ einen Punkt. Wir müssen jetzt nur noch festlegen, in welcher Reihenfolge wir die Bezeichnungen 1, 2, 3 auf die Punkte $1', 2', 3'$ übertragen wollen. Dies geschehe in folgender Weise:

---

[1]) Die hier eingeführte Gruppe ist im wesentlichen identisch mit der von Coble, Trans. Amer. Math. soc. 16. 17. 18, *Point sets and allied Cremona groups* untersuchten Gruppe. Vgl. außerdem das Referat des Verf. in den Jahresber. der DMV. Bd. 42 Abt. 2 pg. 130.

Eine beliebige Kurve C in der Ebene $\mathfrak{E}$ sei vom Grade n und gehe durch 1, 2, 3 i_1-fach, i_2-fach, i_3-fach hindurch. Wir wollen nun die Bezeichnung 1 auf denjenigen der Punkte $1', 2', 3'$ übertragen, durch den das Bild von C in der Ebene $\mathfrak{E}'$ $(n - i_2 - i_3)$-fach hindurchgeht. Es gehe durch 2 $(n - i_3 - i_1)$-fach, durch 3 $(n - i_1 - i_2)$-fach hindurch. Wir wollen sagen, ein Punkt der Ebene $\mathfrak{E}$ und ein Punkt der Ebene $\mathfrak{E}'$, die auf Grund dieser Festsetzung dieselbe Bezeichnung tragen, *entsprechen einander.* Man sieht leicht, daß diese Festsetzung unabhängig von der speziellen Wahl der Kurve C ist.

2. Es seien in der Ebene $\mathfrak{E}$ 0 der Scheitel, $1, 2, \ldots 2n-2$ die einfachen Fundamentalpunkte einer Jonquières-Transformation n. Grades, die die Ebene $\mathfrak{E}$ in eine Ebene $\mathfrak{E}'$ überführen möge. $\mathfrak{E}'$ gehe wieder in $\mathfrak{E}$ über vermöge einer Jonquières-Transformation mit dem Scheitel $0'$ und den einfachen Fundamentalpunkten $1', 2', \ldots (2n-2)'$.

Zunächst wollen wir festsetzen, daß die Scheitel dieselbe Bezeichnung tragen sollen. Sodann gehen alle Punkte, die auf einen Fundamentalpunkt ν in der Ebene $\mathfrak{E}$ unmittelbar folgen, in Punkte über, die auf einer Geraden durch 0 liegen; auf dieser Geraden liegt dann noch ein Fundamentalpunkt μ'. Wir setzen jetzt fest: μ' trage ebenfalls die Bezeichnung ν. Zwei Punkte der Ebene $\mathfrak{E}$ und der Ebene $\mathfrak{E}'$, die auf Grund dieser Festsetzung dieselbe Bezeichnung tragen, wollen wir *einander zugeordnet* nennen.

Diese beiden Arten der Übertragung sind wesentlich verschieden voneinander, aber ihre Anwendungsgebiete überschneiden sich. Eine quadratische Transformation läßt sich auf drei verschiedene Weisen als Jonquières-Transformation 2. Grades auffassen, und wir werden bei jeder quadratischen Transformation anzugeben haben, ob die entsprechenden oder die zugeordneten Punkte dieselbe Bezeichnung tragen sollen, und, im letzteren Falle, welchen Fundamentalpunkt wir als Scheitel auffassen wollen. Aber wir können die erste Art der Übertragung nicht entbehren, denn die zweite Art ist unsymmetrisch und gestattet keinen Übergang zwischen den in ihr liegenden drei Möglichkeiten der Zuordnung.

Aber auch die zweite Art der Übertragung ist unentbehrlich, denn z. B. eine Jonquières-Transformation mit lauter gewöhnlichen Punkten läßt sich in sehr verschiedener Weise in quadratische Transformationen auflösen, und wir bekämen durch jede Zerlegung eine andere Übertragung. Wenn wir die Jonquières-Transformation als etwas Einheitliches auffassen wollen, muß aber eindeutig bestimmt sein, in welcher Weise die Bezeichnungen übertragen werden sollen.

Für die Segre-Transformationen können wir zwar nach Chisini eine eindeutig bestimmte Zerlegung angeben, aber sie benutzt willkürliche Punkte, und diese „entsprechen" gerade den wirklichen Fundamentalpunkten der inversen Segre-Transformation.

Satz 9: *Liegt eine Reihe von Fundamentalpunkten einer Jonquières-Transformation auf einem Zweig, so liegen auch die ihnen zugeordneten auf einem Zweig, aber das Verhältnis von Folge und Vorangehen kehrt sich für die einfachen Fundamentalpunkte um.* Denn folgt ein Punkt 2 in der ursprünglichen Ebene auf einen Punkt 1, und hat eine Kurve dort in diesen Punkten die Vielfachheiten i_1 und i_2, so ist $i_1 \geqq i_2$. Nach Ausführung der Transformation ist $i_2' = n - i_0 - i_2 \geqq i_1' = n - i_0 - i_1$; d. h. jede Kurve, die durch 1 geht, geht dann auch durch 2. Das ist nur richtig, wenn 1 auf 2 folgt.

Satz 10: *Von den einfachen Fundamentalpunkten einer ganzen Jonquières-Transformation sind die auf den Scheitel unmittelbar folgenden, denen zugeordnet, die nicht auf den Scheitel unmittelbar folgen, und umgekehrt.*

Sei 0 der Scheitel, $1, 2, \ldots n-1$ die auf 0 unmittelbar folgenden, $n, n+1, \ldots 2n-2$ die nicht auf 0 unmittelbar folgenden einfachen Fundamentalpunkte einer

ganzen Jonquières-Transformation J. Eine Kurve C habe im Punkte ν die Vielfachheit i_ν, im zugeordneten Punkte die Vielfachheit i'_ν; die Summe ihrer Vielfachheiten in den auf 0 unmittelbar folgenden Punkten, die nicht Fundamentalpunkte von J sind, und demzufolge wieder in auf 0 unmittelbar folgende Punkte übergehen, sei j.

Dann ist nach Satz 1:

$$i_0 = j + \sum_1^{n-1\mu} i_\mu , \tag{12}$$

außerdem gilt

$$i'_0 = i_0 + \sum_1^{2n-2\mu} \left(\frac{n - i_0}{2} - i_\mu \right) . \tag{3}$$

Darin (12) eingesetzt, ergibt

$$i'_0 = j + \sum_n^{2n-2\mu} (n - i_0 - i_\mu).$$

Sind i'_{a_μ} die Vielfachheiten der auf 0 in der neuen Ebene unmittelbar folgenden Punkte, so sagt Satz 1

$$i'_0 = j + \sum_1^{n-1\mu} i'_{a_\mu} = j + \sum_1^{n-1\mu} (n - i_0 - i_{a_\mu}).$$

Da nun zwischen den Vielfachheiten in den einfachen Fundamentalpunkten keine algebraischen Beziehungen, sondern nur Ungleichungen bestehen, gilt die Gleichung:

$$\sum_n^{2n-2\mu} n - i_0 - i_\mu = \sum_n^{2n-2\mu} n - i_0 - i_{a_\mu}$$

identisch in allen i_μ; also sind die Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ gleich den Zahlen $n, n+1, \ldots, 2n-2$ in irgendeiner Reihenfolge. Damit ist der Satz bewiesen.

Einem algebraischen Zweig von Punkten, der überhaupt nicht auf 0 folgt, ist demnach ein Zweig von lauter auf 0 unmittelbar folgenden Punkten zugeordnet. Es gilt auch das Umgekehrte, denn wenn auf einem Zweig kein Punkt vorkommt, der auf 0 unmittelbar folgt, so folgt er überhaupt nicht auf 0.

Die Erzeugenden der Gruppe.

Wir wollen nun unsere Gruppe von Cremona-Transformationen aufbauen. Zunächst müssen wir festsetzen, was wir als *Einheit* in unserer Gruppe gelten lassen wollen:

Eine Kollineation sei die Einheit, wenn je zwei durch die Kollineation verknüpfte Punkte dieselbe Bezeichnung tragen. Es kann also sehr wohl eine Transformation in unserem Sinne die Einheit sein, die es analytisch nicht ist. Aber auch umgekehrt braucht eine Transformation nicht die Einheit zu sein, wenn im analytischen Sinn jeder Punkt festbleibt; denn es kann sein, daß durch die Transformation die Bezeichnungen der Punkte irgendwie vertauscht werden.

Satz 11: *Eine Transformation, die die Vielfachheit jeder Kurve in jedem Punkt ungeändert läßt, ist die Einheit.*

Denn dann müssen die Geraden in Kurven ohne mehrfache Punkte übergehen. Ein Geradenpaar, das sich in der ursprünglichen Ebene in einem Punkt P schneidet, muß in eine Kurve C übergehen, die in dem Punkt mit derselben Bezeichnung P einen Doppelpunkt hat. C muß zerfallen, denn sonst ginge schon eine der beiden Geraden in C über (was nicht möglich ist), und die andere Gerade wäre Fundamentalgerade.

Die beiden Teile, die je einfach durch P hindurchgehen, dürfen sich in keinem anderen Punkte schneiden, müssen also Geraden sein. Unsere Transformation ist also eine Kollineation und führt P in P über.

Zu Erzeugenden sind auf Grund des Zerlegungssatzes die quadratischen und die Jonquières-Transformationen am besten geeignet. Für sie müssen wir zunächst eine passende Darstellung finden, da ja der analytische Ausdruck nicht geeignet ist. Wir können aber sagen, daß eine erzeugende Transformation durch Angabe ihrer Fundamentalpunkte bis auf Kollineationen eindeutig bestimmt ist. Zwei Transformationen mit denselben Fundamentalpunkten unterscheiden sich nur um eine Kollineation, und wenn wir dafür Sorge tragen, daß die Übertragung der Bezeichnungen in beiden Fällen in der gleichen Weise geschieht, ist diese Kollineation in unserer Gruppe gleich der Einheit zu setzen. Wir können also folgende Symbole einführen:

1. $\{123\}$ *sei die quadratische Transformation mit den Fundamentalpunkten* 1, 2, 3; die Bezeichnungen sollen dabei auf die entsprechenden Punkte übertragen werden.

2. $[1; 23 \ldots 2n-1]$ *sei die Jonquières-Transformation n. Grades mit dem Scheitel* 1 *und den einfachen Fundamentalpunkten* 2, 3, $\ldots 2n-1$. Die Bezeichnungen sollen dabei auf die zugeordneten Punkte übertragen werden.

Hierbei ist zu beachten, daß ein solches Symbol nur Sinn hat, wenn es tatsächlich eine Transformation mit den angegebenen Fundamentalpunkten gibt, und wir müssen, wenn wir ein solches Symbol einführen, in jedem Fall vorher untersuchen, ob die Punkte die Verbote beachten.

Wir werden öfters die Ausführbarkeit einer Transformation auf anderem Wege beweisen: wenn wir zwei Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ haben, von denen wir wissen, daß sie birational miteinander verknüpft sind, und es folgt auf irgendeine Weise, etwa aus den Relationen oder durch Betrachtung der vielfachen Punkte, daß für ihre Verknüpfung nur eine bestimmte Transformation in Frage kommt, so ist diese auch ausführbar.

3. Oben, bei der Definition der Einheit deuteten wir bereits an, daß es Transformationen geben könne, die nur in einer *Vertauschung der Bezeichnungen* bestehen. Daß wir sie notwendig haben, zeigt z. B. der Unterschied von Entsprechen und Zugeordnetsein. Sie bilden für sich eine Untergruppe der Gesamtgruppe, aber keinen Normalteiler. Wir stellen sie am besten in der üblichen Weise als Produkt von Zyklen dar (in runden Klammern).

An und für sich haben wir viel zu viele Erzeugende eingeführt. Wir kämen aus mit den Transpositionen eines festen gewöhnlichen Punktes mit allen anderen gewöhnlichen Punkten der Ebene und (auf Grund des Zerlegungssatzes in der Alexanderschen Form) mit einer einzigen quadratischen Transformation $\{123\}$ mit drei gewöhnlichen Fundamentalpunkten.

Die Relationen der Gruppe.

Durch die Schreibweise ist bereits angedeutet, daß eine erzeugende Transformation die in ihrem Symbol enthaltenen Punkte als Fundamentalpunkte besitzt, einerlei, wo sie sich gerade befinden. Ein und dasselbe Element kann also sehr wohl an verschiedenen Stellen der Untersuchung wesentlich verschiedenen analytischen Ausdrücken entsprechen; diese werden sich im allgemeinen nicht einmal durch lineare Substitutionen ineinander überführen lassen.

Was unter dem Produkt zweier Elemente zu verstehen ist, ist demnach ebenfalls eindeutig: der erste Faktor wird ausgeführt, dadurch bekommen die Fundamentalpunkte des zweiten Faktors eine neue Lage, möglicherweise sogar neue Folgebeziehungen.

Dann wird der zweite Faktor mit diesen Fundamentalpunkten ausgeführt. Es kann dabei sehr wohl sein, daß der zweite Faktor vor Ausführung des ersten noch überhaupt keinen Sinn hat.

Zur vollständigen Beschreibung der Gruppe muß noch das System der Relationen angegeben werden. Nur zwei sind wesentlich. Die andern werden durch die überzähligen Erzeugenden notwendig gemacht.

1. *Es seien* $J_1, J_2, \ldots J_m$ *Jonquières-Transformationen mit demselben Scheitel* 0, *und jeder in Frage kommende Punkt sei einfacher Fundamentalpunkt einer geraden Anzahl von diesen Transformationen. Dann ist* $\Pi = J_1 . J_2 \ldots J_m = 1$.

Denn sei C eine beliebige Kurve n. Grades; ihre Vielfachheit sei vor Ausführung von Π in dem einfachen Fundamentalpunkt ν gleich i_ν, im Scheitel i_0; nach Ausführung von Π i'_ν bzw. i'_0. Dann ist ihre Vielfachheit im Punkte ν nach Ausführung eines Faktors mit ν als einfachem Fundamentalpunkt gleich $(n - i_0) - i_\nu$. $(n - i_0)$ bleibt aber ungeändert, und die Vielfachheit von C im Punkte ν wird nach einer weiteren Transformation mit ν als Fundamentalpunkt wieder i_ν. Die Summe S enthält neben einem Glied $\frac{n - i_0}{2} - i_\nu$ immer das Glied $\frac{n - i_0}{2} - (n - i_0 - i_\nu)$, und diese heben sich auf. Es ist also $S = 0$ und Geraden gehen in Geraden über. Π ist also eine Kollineation, also $\Pi = 1$.

Oder in anderer Form: Das Produkt zweier Jonquières-Transformationen mit demselben Scheitel ist gleich der Jonquières-Transformation mit demselben Scheitel und denjenigen Punkten zu einfachen Fundamentalpunkten, die Fundamentalpunkte nur eines Faktors sind.

2. Als wesentliche Relationen sind dann die *Relationen zwischen den Permutationen*, also das Relationensystem der symmetrischen Gruppe zu nennen. Sie hängen davon ab, welche Erzeugenden wir wählen. Eine Untersuchung dieser Relationen gehört nicht hierher.

3. Aus der Definition von Entsprechen und Zugeordnetsein ergibt sich:

$$[1; 23] = \{123\}(23) = [2; 13](123)$$

4. Aus dem Begriff der Vertauschung folgt:

$$(\ldots 12 \ldots)[\ldots 2 \ldots] = [\ldots 1 \ldots](\ldots 12 \ldots)$$

Denn der Punkt, der nach der Permutation die Bezeichnung 2 trägt, trug vorher die Bezeichnung 1.

Wir werden später beweisen, daß dieses Relationensystem vollständig ist. Zunächst wollen wir einige abgeleitete Relationen angeben, die einfach und für die Anwendungen wichtig sind.

Ein Sonderfall von 1) ist:

$$[0; 12 \ldots 2n - 2]^2 = 1$$

und daraus sowie aus 2), 3) und 4) folgt

$$\{123\}^2 = 1.$$

Es ist

$$[1; 23][1; 34][1; 24] = \{123\}\{124\}\{123\}(34) = 1$$

also

$$\{124\} = \{123\}(34)\{123\}$$

d. h. eine quadratische Transformation als Transformierte einer Permutation.

Anwendung auf unser Problem.

Eine Ebene $\mathfrak{E}$ werde durch eine Cremona-Transformation T in eine Ebene $\mathfrak{F}$ übergeführt. T sei in irgendeiner Weise in Jonquières-Transformationen zerlegt: $T = J_1 . J_2 . . . . J_n$. Wir wollen nun die Ebene $\mathfrak{E}$ im Verlaufe der Transformation verfolgen; sie gehe durch J_1 in $\mathfrak{E}_1$, dann durch J_2 in $\mathfrak{E}_2 \ldots$ durch J_n in $\mathfrak{E}_n = \mathfrak{F}$ über.

Sei nun C eine Kurve in der Ebene $\mathfrak{E}$ vom Grade n_0; der Grad des Bildes von C in der Ebene $\mathfrak{E}_\nu$ sei n_ν. Dann behaupten wir:

Man kann T so zerlegen, d. h. man kann die gegebene Zerlegung mit Hilfe der Relationen so umformen, *daß zuerst der Grad von C bei jedem Schritt erniedrigt wird, dann während einiger Schritte fest bleibt und dann erst wieder ansteigt.*

Ist dies bei der gegebenen Zerlegung nicht der Fall, so gibt es einen Index ν, so daß entweder

$$n_{\nu-1} < n_\nu \geqq n_{\nu+1}$$

oder

$$n_{\nu-1} \leqq n_\nu > n_{\nu+1}$$

Wir wollen sagen, wir befinden uns auf einem *Gipfel*, wenn wir die Transformation J_ν bereits ausgeführt haben, $J_{\nu+1}$ hingegen noch nicht, wenn also $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{E}_\nu$ übergegangen ist. n_ν heiße dann auch der Grad des Gipfels.

Wir brauchen uns nur um einen, z. B. den ersten der beiden Fälle zu bekümmern, denn tritt bei T der zweite auf, so finden wir bei T^{-1} den ersten vor, mit denselben Zahlen, nur in umgekehrter Reihenfolge.

Wir wollen nun die Zerlegung für unsere Zwecke noch etwas ändern: Liegt ein Gipfel zwischen zwei Jonquières-Transformationen mit demselben Scheitel, so wollen wir diese beiden zu einer einzigen Jonquières-Transformation zusammenfassen, so daß der Gipfel wegfällt oder hinwegrückt.

Andererseits wollen wir die Faktoren soweit in Jonquières-Transformationen mit verschiedenen Fundamentalpunkten zerlegen, als es möglich ist, ohne daß sich neue Gipfel erheben. Wir setzen also voraus, daß auf dem Gipfel kein Teiler von J_ν^{-1} und $J_{\nu+1}$ den Grad von C erniedrigt. Nach Satz 5 sind sie entweder ganze Jonquières-Transformationen oder quadratische Transformationen. Es sei nun $J_\nu = [1; 35 \ldots 4k+1]$ vom $k.$, $J_{\nu+1} = [2; 46 \ldots 4l+2]$ vom $l.$ Grad. C habe auf dem Gipfel im Punkte ϱ die Vielfachheit i_ϱ. Nach (6) ist daher im ersten Fall die Vielfachheit von C im Scheitel größer als $\frac{n_\nu}{3}$; im zweiten Fall gibt es einen Fundamentalpunkt in dem C eine Vielfachheit $i > \frac{n_\nu}{3}$ bzw. $i \geqq \frac{n_\nu}{3}$ hat. Wir haben in diesem Fall die Bezeichnung noch frei, und wir wollen diesen Fundamentalpunkt 1 bzw. 2 nennen.

Wir können sagen, bzw. wir können 1 und 2 so wählen, daß es gewöhnliche Punkte sind. Es ist

$$(13) \qquad i_1 > \frac{n_\nu}{3} \geqq \frac{n_\nu - i_2}{2} \quad \text{und} \quad i_2 \geqq \frac{n_\nu}{3} > \frac{n_\nu - i_1}{2} .$$

Ist J_ν nicht quadratisch, so gilt Satz 3, und da 2 Nicht-Segre-Punkt ist, kann 2 nicht Fundamentalpunkt von J_ν sein. Ist J_ν quadratisch, so ist 2 ebenfalls nicht Fundamentalpunkt von J_ν, denn sonst könnten wir 2 auch als Scheitel von J_ν auffassen, und J_ν und $J_{\nu+1}$ hätten denselben Scheitel. Ebenso ist 1 nicht Fundamentalpunkt von $J_{\nu+1}$.

Da für J_ν die Summe $S < 0$, ist mindestens ein Summand negativ. Es gibt also einen Fundamentalpunkt 3 von J_ν, der höchstens auf 1 folgt, und für den $i_3 > \frac{n_\nu - i_1}{2}$; da für $J_{\nu+1}$ die Summe $S \leqq 0$, sind nicht alle Summanden positiv, und es gibt einen Fundamentalpunkt 4 von $J_{\nu+1}$, der höchstens auf 2 folgt, und für den $i_4 \geqq \frac{n_\nu - i_2}{2}$. Weder 3 noch 4 liegen auf der Geraden 12, denn aus (13) folgt

$$i_1 + i_2 + i_3 > n \quad \text{und} \quad i_1 + i_2 + i_4 > n$$

Es existieren also $\{123\}$ und $\{124\}$ und erniedrigen den Grad. Sie mögen $\mathfrak{E}_\nu$ in die Ebenen $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{E}''$ überführen, in denen nach dem Gesagten der Grad von C kleiner als n_ν ist. Wenn es uns nun gelingt, Jonquières-Transformationen zu finden, die $\mathfrak{E}_{\nu-1}$ in $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{E}'$ unmittelbar in $\mathfrak{E}''$, und $\mathfrak{E}''$ in $\mathfrak{E}_{\nu+1}$ überführen, dann ist unser Satz bewiesen.

T hat die Form:

$$\ldots\ldots [1; 35 \ldots 4k+1]\,[2; 46 \ldots 4l+2] \ldots\ldots$$

zwischen J_ν und $J_{\nu+1}$ fügen wir nun

$$\{123\}\{123\}\{124\}\{124\} = 1$$

ein. Wir erhalten:

$$T = \cdots\cdots [1; 35 \cdots 4k+1]\{123\}\uparrow\{123\}\{124\}\uparrow\{124\}\,[2; 46 \cdots 4l+2] \cdots\cdots$$

An den mit ↑ bezeichneten Stellen haben wir die Ebenen $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{E}''$ erreicht. Das Produkt $J_\nu J_{\nu+1}$ ist durch diese beiden Einschnitte in drei Faktoren $F_1 F_2 F_3$ geteilt, die wir jetzt einzeln ausrechnen wollen. Auftretende Permutationen wollen wir dabei gleich auf Grund der Relation 4 an das Ende des Ausdrucks schaffen. Es ist:

$$\begin{aligned} F_1 &= [1; 35 \cdots 4k+1]\{123\} && = [1; 25 \cdots 4k+1]\,(23) \\ (23)F_2 &= (23)\{123\}\{124\} && = \{134\}\,(243) \\ (243)\,F_3 &= (243)\{124\}\,[2; 46 \cdots 4l+2] && = [3; 26 \cdots 4l+2]\,(1432) \end{aligned}$$

Ist nun $n_{\nu+1} < n_\nu$, so haben wir den Grad des Gipfels damit erniedrigt; ist aber $n_\nu = n_{\nu+1} = \cdots\cdots n_{\nu+\mu}$, so ist durch unser Verfahren die Anzahl $\mu + 1$ dieser Zahlen verkleinert, und nach endlich vielen Schritten ebenfalls der Grad des Gipfels erniedrigt.

Wenn wir dies Verfahren immer auf den höchsten noch vorhandenen Gipfel anwenden, haben wir nach endlich oftmaliger Anwendung des Verfahrens den höchsten bei den Gipfeln auftretenden Grad verkleinert. Da der Grad eines Gipfels nicht kleiner sein kann als 2, bricht unser Verfahren ab. Damit ist der Satz bewiesen.

Aus diesem Satze lassen sich nun drei Folgerungen ziehen, die scheinbar nicht das mindeste miteinander zu tun haben:

Satz 12: 1. *Der Grad einer Kurve läßt sich durch keine Cremona-Transformation erniedrigen, wenn er sich nicht schon durch eine ganze Jonquières-Transformation erniedrigen läßt, für die die Summe S, erstreckt über die auf den Scheitel unmittelbar folgenden Punkte, negativ ist.*

2. Es seien C und C' zwei Kurven desselben Grades, von denen sich keine durch eine Cremona-Transformation dem Grade nach erniedrigen läßt. *Gibt es nun eine Cremona-Transformation T, die C in C' überführt, so läßt sich T so in Jonquières-Transformationen zerlegen, daß bei jedem Schritt der Grad erhalten bleibt.*

3. *Das oben angegebene Relationensystem ist vollständig.* Denn irgendeine Relation $R = 1$, als Transformation aufgefaßt, wird das Netz der Geraden wieder in das Netz der Geraden überführen. Wir können nun dieselben Betrachtungen, die wir über eine Kurve angestellt haben, ebensogut über eine lineare Schar von Kurven anstellen, wenn wir

unter der Vielfachheit der Schar in einem Punkt die kleinste für eine Kurve der Schar gültige Vielfachheit in diesem Punkt verstehen.

Wir können also auf Grund der angegebenen Relationen die Relation R so in Jonquières-Transformationen zerlegen, daß nach jedem Schritt das Bild des Geradennetzes den Grad 1 hat. Da aber jede von der Einheit verschiedene Jonquières-Transformation den Grad des Netzes der Geraden erhöht, ist jeder Faktor von R gleich 1, und $R = 1$ *folgt aus den angegebenen Relationen.*

III. Teil: Das Äquivalenzproblem.

Es soll nun die Frage untersucht werden, wann zwei irreduzibele Kurven C und C' durch Cremona-Transformationen ineinander transformierbar sind. Wir werden dazu zunächst den Grad beider Kurven soweit wie möglich erniedrigen. Auf Grund des vorhergehenden können wir immer entscheiden, ob wir den kleinsten Grad schon erreicht haben, und wenn nicht, können wir eine den Grad erniedrigende Jonquières-Transformation in endlich vielen Schritten finden.

Sind C und C' auf den kleinsten Grad gebracht, so müssen ihre Grade einander gleich, etwa gleich n sein, wenn sie ineinander übergeführt werden können. Sei nun T die Transformation, die sie ineinander überführt. T läßt sich nach Satz 12 so in Jonquières-Transformationen zerlegen, daß der Grad bei jedem Schritt erhalten bleibt.

Im folgenden bedeute i_0 die höchste Vielfachheit, die bei den vielfachen Punkten von C, etwa im Punkte O_0, auftritt, i_1 die höchste Vielfachheit aller von O_0 verschiedenen Punkte, etwa des Punktes O_1. Nach dem von Marletta bewiesenen ist $i_0 \geqq \frac{n}{3}$. Wir unterscheiden nun verschiedene Fälle, von denen jeder eine vollständig von den andern verschiedene Behandlung verlangt und auch zu vollständig verschiedenen Ergebnissen führt.

I. $i_0 = \frac{n}{3}$ (n ist durch 3 teilbar)

(1) A) Es gibt 10 Punkte dieser Vielfachheit.

(2) B) Es gibt 9 Punkte dieser Vielfachheit.

(3) C) Es gibt weniger als 9 Punkte dieser Vielfachheit.

II. $i_0 > \frac{n}{3}$

(4) A) $i_0 = n - 2$

B) $\frac{n}{3} < i_0 < n - 2$

(5) a) $i_1 = \frac{n - i_0}{2} > 1$

b) $i_1 > \frac{n - i_0}{2}$

(6) α) O_1 folgt nicht auf O_0.

(7) β) O_1 folgt auf O_0.

I. Hauptfall $i_0 = \frac{n}{3}$. Jede Transformation einer solchen Kurve läßt sich in Jonquières-Transformationen zerlegen, deren jede den Grad erhält. Da keine Fundamentalpunkte mit einer größeren Vielfachheit als $\frac{n}{3}$ vorkommen, muß C, damit

$S = \sum_\nu \left(\frac{n - i_0}{2} - i_\nu\right) = 0$ sei, in jedem Fundamentalpunkt die Vielfachheit $\frac{n}{3}$ haben. Es können also nicht zwei Fundamentalpunkte auf einen dritten unmittelbar folgen, und die Transformation läßt sich ohne Zuhilfenahme willkürlicher Punkte in quadratische Transformationen zerlegen. Eine quadratische Transformation, die den Grad nicht ändert, ändert aber auch Anzahl und Vielfachheiten der singulären Punkte nicht. Eine Kurve irgendeines zu I gehörigen Falles kann also niemals in eine Kurve irgendeines anderen Falles übergeführt werden.

1. Fall. Es gibt 10 Punkte mit der Vielfachheit $\frac{n}{3}$.

Es ist dann:

$$10\,\frac{n}{3}\left(\frac{n}{3} - 1\right) \leqq (n-1)\,(n-2), \quad \text{also} \quad n \leqq 6.$$

Demnach ist entweder $n = 3$, $p = 0$ oder $p = 1$. Hier weiß man, daß elliptische Kurven mit gleichen Moduln schon durch eine Projektivität ineinander übergeführt werden können. Im Falle $p = 0$ läßt sich der Grad noch weiter erniedrigen, was wir ausgeschlossen haben.

Oder es ist $n = 6$. In diesem Falle können wir nichts sagen. Es kann Kurven geben, die durch eine Transformation beliebig hohen Grades ineinander übergehen.

2. Fall. Es gibt 9 Punkte mit einer Vielfachheit $\frac{n}{3}$. Wenn kein weiterer mehrfacher Punkt vorkommt, ist $p = 1$. Es kann nur noch ein gewöhnlicher Doppelpunkt vorkommen.

C hat eine Adjungierte D vom 3. Grad, die durch die 9 Punkte einfach hindurchgeht. D, $\frac{n}{3}$-fach gezählt, ist vom n. Grad und geht $\frac{n}{3}$-fach durch die 9 Punkte. Im allgemeinen ist nun eine Kurve durch die Forderung, durch 9 gegebene Punkte je $\frac{n}{3}$-fach hindurchzugehen, eindeutig bestimmt; es gibt dann nur die $\frac{n}{3}$-fach gezählte Kurve 3. Grades. Soll C nicht zerfallen, so müssen die 9 Punkte eine besondere Lage haben. Es gibt dann ein ganzes Büschel von Kurven der verlangten Eigenschaft.

Andrerseits kann es kein Netz von Kurven n. Grades geben, die durch die 9 Punkte je $\frac{n}{3}$-fach hindurchgehen. Denn die 9 Punkte müssen die einzigen Schnittpunkte zweier Kurven der Schar sein. Daraus folgt, daß es keine Kurve vom Grade $n' < n$, $n' \neq 3$ geben kann, die durch die 9 Punkte $\frac{n'}{3}$-fach hindurchginge; denn dann gäbe es ein ganzes Büschel von Kurven n'.Grades mit dieser Eigenschaft, oder, wenn man geeignet oft die Kurve D hinzufügt, gäbe es ein ganzes Büschel von zerfallenden Kurven n.Grades, die durch die 9 Punkte $\frac{n}{3}$-fach hindurchgingen. In diesem Büschel käme die Kurve C nicht vor; dies ist ein Widerspruch.

Insbesondere kann es nur eine Kurve D geben; denn gäbe es eine zweite, D', so würden $D' \cdot D^{\frac{n}{3}-1}$ und $D^{\frac{n}{3}}$ ein Büschel von zerfallenden Kurven n.Grades bestimmen, in dem C nicht vorkommt.

Wollen wir nun von zwei Kurven C und C' dieser Art entscheiden, ob sie ineinander transformierbar sind, so müssen wir zunächst Geschlecht und Moduln untersuchen. Außerdem müssen Geschlecht und Moduln der adjungierten Kurven D und D' übereinstimmen. Fernerhin müssen D und D' birational so aufeinander beziehbar sein, daß die 9 Punkte auf D in die 9 Punkte auf D' übergehen. Dies ist leicht zu entscheiden, denn man hat eine Übersicht über die Gesamtheit der birationalen Transformationen des elliptischen Gebildes in sich und der Geraden in sich.

Dies sind alles nur notwendige Bedingungen. Eine völlige Entscheidung ist in diesem Falle vorläufig noch nicht möglich.

3. Fall. Es sind weniger als 9 Punkte mit einer Vielfachheit $\frac{n}{3}$ vorhanden. Es kommen also höchstens 8 Punkte in Frage als Fundamentalpunkte einer Cremona-Transformation, die den Grad erhält. Dann ist, wie man leicht aus den Gleichungen unter 3. auf Seite 194 schließen kann [1]), der Grad dieser Cremona-Transformation höchstens 17; es kommen also nur eine endliche Anzahl von Cremona-Transformationen in Frage, und wir können in endlich vielen Schritten entscheiden, ob zwei Kurven ineinander transformierbar sind.

II. Hauptfall. Es sei $i_0 > \frac{n}{3}$.

Es kann dann höchstens noch einen nicht auf O_0 folgenden Punkt O_1 mit einer Vielfachheit $i_1 \geqq \frac{n}{3}$, und dann keinen weiteren nicht auf O_0 folgenden Punkt mit einer Vielfachheit $\geqq \frac{n - i_0}{2}$, geschweige denn $\frac{n - i_1}{2}$ geben, denn sonst ließe sich der Grad durch eine quadratische Transformation erniedrigen. Sieht man also von O_0 und den auf O_0 folgenden Punkten ab, so ist die Summe der drei höchsten Vielfachheiten kleiner als n.

Sei J eine Jonquières-Transformation, deren Scheitel O_1 und deren einfache Fundamentalpunkte von O_0 verschieden sind. Angenommen, die Summe S für J sei $S \leqq 0$; dann wäre auch S, erstreckt über die beiden Fundamentalpunkte $O_2 O_3$ mit den größten Vielfachheiten i_2 und i_3

$$S = \left(\frac{n - i_1}{2} - i_2\right) + \left(\frac{n - i_1}{2} - i_3\right) \leqq 0,$$

also $i_1 + i_2 + i_3 \geqq n$, was nicht richtig ist. Jede Jonquières-Transformation mit lauter von O_0 verschiedenen Fundamentalpunkten erhöht also den Grad. Jede Jonquières-Transformation mit von O_0 verschiedenem Scheitel, zu deren einfachen Fundamentalpunkten O_0 gehört, läßt aber sich zerlegen in eine quadratische Transformation mit O_0 als Fundamentalpunkt, die bestenfalls den Grad erhält, und eine Jonquières-Transformation mit lauter von O_0 verschiedenen Fundamentalpunkten, die den Grad erhöht.

Da sich nun eine Cremona-Transformation T, die den Grad erhält, in Jonquières-Transformationen zerlegen läßt, die alle ebenfalls den Grad erhalten, haben alle diese Jonquières-Transformationen ihren Scheitel in O_0, und T ist ebenfalls eine Jonquières-Transformation mit dem Scheitel in O_0.

Nach (4) bleibt dann i_0 erhalten, wenn der Grad erhalten bleibt, und wir können die weitere Einteilung nach der Größe von i_0 vornehmen.

---

[1]) Montesano, Rend. Napoli (3) 9 pg. 259.

4. Fall. $i_0 = n-2$. Die Kurve ist hyperelliptisch. Einen weiteren mehrfachen Punkt gibt es nicht. Diesen Fall hat Marletta bereits behandelt. Der $(n-2)$-fache Punkt sei der Punkt $(x = z = 0)$. Entscheidend ist die Gesamtheit der Tangenten von dem $(n-2)$-fachen Punkt, oder, was dasselbe ist, die Diskriminante der Gleichung als Gleichung 2. Grades in y: Zwei Kurven lassen sich dann und nur dann ineinander überführen, wenn die entsprechenden Tangentensysteme projektiv aufeinander bezogen sind (wenn die Diskriminanten durch eine lineare Substitution ineinander übergehen).

5. Fall. $n-2 > i_0 > \frac{n}{3}$ $(n>3)$, $i_1 = \frac{n-i_0}{2}\,(>1)$.

Aus $S = \sum_1^m \left(\frac{n-i_0}{2} - i_\nu\right) = 0$ folgt dann, daß als einfache Fundamentalpunkte der Jonquières-Transformation, die die beiden Kurven C und C' ineinander überführen soll, nur i_1-fache Punkte in Frage kommen. Dies sind gewiß nur endlich viele. Es ist

$$n - i_0 - i_1 = \frac{n-i_0}{2} = i_1.$$

Die Einteilung nach dem Verhalten von i_1 ist also gerechtfertigt. Auch hier können zwei Kurven nur dann ineinander transformierbar sein, wenn Anzahl und Vielfachheiten der mehrfachen Punkte beider Kurven übereinstimmen.

6. Fall. $n-2 > i_0 > \frac{n}{3}$, $i_1 > \frac{n-i_0}{2}$, O_1 folgt nicht auf O_0. Die Vielfachheit aller übrigen Punkte ist höchstens $r = n - i_0 - i_1$; damit $S = \sum_1^m \frac{n-i_0}{2} - i_\nu = 0$ werden kann, darf diese Summe nur zwei Glieder enthalten, und i_2 muß gleich r sein. Es kommen hier also nur quadratische Transformationen in Betracht, C in C' überzuführen.

Ist $i_0 + i_1 \leqq n-2$, so gibt es nur eine endliche Anzahl von Punkten mit der Vielfachheit r, und wir können wieder alle Fälle durchprobieren. Ist aber $i_0 + i_1 = n-1$, so kommt als dritter Fundamentalpunkt jeder beliebige einfache Kurvenpunkt in Frage. In diesem Fall setzt man wohl am besten die quadratische Transformation mit unbestimmten Koeffizienten an und untersucht, ob das sich ergebende Gleichungssystem eine Lösung hat.

7. Fall. $n-2 > i_0 > \frac{n}{3}$; $i_1 > \frac{n-i_0}{2}$; O_1 folgt auf O_0. Für jede Jonquières-Transformation J, die den Grad erhält, sind die Voraussetzungen für die Sätze 3—6 erfüllt, und zwar die am Ende des betr. Paragraphen angegebenen. Denn kein Teiler von J wird den Grad erniedrigen. J ist eine ganze Jonquières-Transformation; die Summe S, erstreckt über die auf O_0 unmittelbar folgenden Fundamentalpunkte von J, ist nicht positiv. Für den Grad k von J gilt die Ungleichung:

$$k < \frac{n+i_0}{n-i_0}.$$

Allerdings werden hier die Vielfachheiten der mehrfachen Punkte im allgemeinen nicht erhalten.

Um zu entscheiden, ob zwei Kurven C und C' ineinander transformierbar sind, werden wir also eine ganze Jonquières-Transformation k. Grades mit unbestimmten Koeffizienten ansetzen und die Lösbarkeit des sich ergebenden Gleichungssystems untersuchen.

In konkreten Fällen wird man dabei zweckmäßig von der Tatsache Gebrauch machen, daß eine ganze Jonquières-Transformation die Polare des Scheitels wieder in die Polare des Scheitels überführt. Hat nämlich C die Gleichung

$$C \equiv \sum_0^m y^\mu P_{n-\mu}(x, z) = 0$$

und liegt der Scheitel im Punkte $(x = z = 0)$, so hat die Polare des Scheitels die Gleichung

$$P_C \equiv \sum_1^m \mu y^{\mu-1} P_{n-\mu}(x, z) = 0 .$$

Setzen wir nun

$$(2) \qquad \begin{aligned} x &= \xi \cdot A(\xi, \zeta) \\ y &= \eta \cdot B(\xi, \zeta) + C(\xi, \zeta) \\ z &= \zeta \cdot A(\xi, \zeta) , \end{aligned}$$

so geht C über in

$$C' \equiv \sum_0^m \sum_0^\mu \binom{\mu}{\varrho} (\eta \cdot B)^\varrho C^{\mu-\varrho} A^{n-\mu} P_{n-\mu}(\xi, \zeta) = 0 ,$$

und die Polare geht über in

$$(P_C)' \equiv \sum_1^m \sum_0^{\mu-1} \binom{\mu-1}{\varrho} \cdot \mu \cdot (\eta B)^\varrho \cdot C^{\mu-\varrho-1} \cdot A^{n-\mu} \cdot P_{n-\mu}(\xi, \zeta) = 0 .$$

Aber die Polare von C' ist

$$P_{C'} \equiv \sum_0^m \sum_1^\mu \varrho \cdot \binom{\mu}{\varrho} (\eta B)^{\varrho-1} C^{\mu-\varrho} A^{n-\mu} P_{n-\mu}(\xi, \zeta) = 0 .$$

Glieder mit $\mu = 0$ kommen hier nicht mehr vor, so daß wir μ in der ersten Summe auch von 1 an laufen lassen können. Ersetzen wir noch ϱ durch $\varrho + 1$, so erhalten wir:

$$P_{C'} \equiv \sum_1^m \sum_0^{\mu-1} (\varrho + 1) \binom{\mu}{\varrho + 1} (\eta B)^\varrho C^{\mu-\varrho-1} A^{n-\mu} P_{n-\mu}(\xi, \zeta) = 0 .$$

Aus $\binom{\mu-1}{\varrho} \cdot \mu = \binom{\mu}{\varrho+1} \cdot (\varrho + 1)$ folgt:

$$P_{C'} = (P_C)' .$$

Sollen also zwei Kurven C und C' ineinander überführbar sein, so müssen es auch die ersten, zweiten, ... k. Polaren des Scheitels sein; man wird also, bei der höchsten auftretenden Polaren anfangend, immer mehr Parameter der ganzen Jonquières-Transformation bestimmen und entweder zum Widerspruch oder zu der vermittelnden Transformation gelangen.

Damit ist für alle Kurven von höherem Geschlecht als 1 *entschieden, ob sie durch Cremona-Transformationen ineinander überführbar sind oder nicht.*

Eingegangen 28. Juni 1932.

An approximate functional equation with applications to a problem of Diophantine approximation.

By *J. R. Wilton* in Adelaide (South Australia).

---

1. In recent papers, published at the same time, Chowla [1]) and Walfisz [2]) have proved a number of results as to the order of magnitude of $\sum_{n \leqq \omega} d(n) \cos 2\pi n x$ and kindred sums, where $d(n)$ is the number of divisors of the positive integer n, and x is (except in one case) irrational. In the present communication I obtain most of their theorems and some new results by a systematic application of an approximate functional equation for the sum considered; the method is that originated by Hardy and Littlewood nearly twenty years ago [3]), and employed by Oppenheim [4]) to prove some analogous theorems concerning $\sum_{n \leqq \omega} r(n) e^{i\pi n x}$, and more general sums [5]), where $r(n)$ is the number of ways of expressing n as the sum of two squares.

It is convenient to follow the practice adopted by Walfisz of detailing a set of special classes of numbers x; each class is indicated by a Roman figure I, II, . . ., and the particular class of number x to which a given formula is applicable is indicated by attaching the appropriate Roman subscript to the Arabic reference number of the formula. The first five of Walfisz's six classes are:

I. x is irrational and, when expanded in a simple continued fraction, has bounded partial quotients.

II. x runs through an appropriate set of almost all numbers.

III. x is an arbitrary irrational number.

IV. x is an arbitrary irrational algebraic number.

V. x belongs to an appropriate set of irrational numbers, depending on a parameter Φ, to be introduced later.

It is also convenient, though not necessary, to make the restriction

$$0 < x \leqq 1;$$

this will be assumed throughout. If x, expanded in a simple continued fraction, is given by

$$\frac{1}{x} = a + \frac{1}{a_1 +} \frac{1}{a_2 +} \cdots = a + x_1 , \tag{1. 1}$$

---

[1]) S. D. Chowla, Math. Zeitschrift **33** (1931), 544—563.

[2]) A. Walfisz, ibid., 564—601.

[3]) G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Acta Math. **37** (1914), 155—239.

[4]) A. Oppenheim, Proc. London Math. Soc. (2) **28** (1928), 476—483.

[5]) My method is applicable to these sums also, and to the sums $\Sigma \sigma_a(n) e^{2\pi i n x}$ considered by Chowla. See my paper "Analogues of Voronoï's summation formula", Proc. London Math. Soc. 1933.

and if

$$x_r^{-1} = a_r + x_{r+1} \qquad (r = 1, 2, \ldots), \tag{1.2}$$

then I add to the above five classes the three following:

VI. x is a fixed rational number,

$$\frac{1}{x} = a + \frac{1}{a_1 +}\,\frac{1}{a_2 +} \cdots \frac{1}{a_k}\,. \tag{1.21}$$

VII. x is irrational and [6])

$$a_r < Ar^{1+K} \qquad (K \geqq 0,\ r = 1, 2, \ldots).$$

VIII. x is irrational and

$$a_r < Ae^{Kr} \qquad (K > 0,\ r = 1, 2, \ldots).$$

Let $\Phi(t)$ denote a positive monotonic function of t, defined in $t > 0$, and tending to zero as $t \to \infty$. Then the following statements are true:

$$\sum_{n \leqq \omega} d(n)\, e^{2\pi i n x} = O(\omega^{\frac{1}{2}} \log\, \omega), \tag{1_{I}}$$

$$\sum_{n \leqq \omega} d(n)\, e^{2\pi i n x} = o(\omega \log\, \omega), \tag{2_{III}}$$

$$\sum_{n \leqq \omega} d(n) \cos 2\pi n x = \underset{L}{\Omega_R}\{\Phi(\omega)\, \omega \log\, \omega\}, \tag{3_{V}}$$

$$\sum_{n \leqq \omega} \frac{d(n)}{n} \cos 2\pi n x = \Omega_R\{\Phi(\omega) \log^2 \omega\}; \tag{4_{V}}$$

these four formulae are due to Chowla [7]), except that he gives only the Ω_R result in (3);

$$\sum_{n \leqq \omega} d(n)\, e^{2\pi i n x} = O(\omega^{\frac{1}{2}} \log^{2+\varepsilon} \omega) \qquad (\varepsilon > 0), \tag{5_{II}}$$

$$\sum_{n \leqq \omega} d(n)\, e^{2\pi i n x} = \Omega(\omega^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{1}{2}} \omega\, \mathrm{loglog}\, \omega), \tag{6_{II}}$$

$$\sum_{n \leqq \omega} d(n) \sin 2\pi n x = \underset{L}{\Omega_R}\{\Phi(\omega)\, \omega \log\, \omega\}, \tag{7_{V}}$$

$$\sum_{n \leqq \omega} \frac{d(n)}{n} \sin 2\pi n x = \underset{L}{\Omega_R}\{\Phi(\omega) \log\, \omega\}, \tag{8_{V}}$$

$$\sum_{n \leqq \omega} \frac{d(n)}{n} \sin 2\pi n x = o\,(\log\, \omega), \tag{9_{III}}$$

$$\sum_{n \geqq 1} \frac{d(n)}{n}\, e^{2\pi i n x} \qquad \textit{converges}; \tag{10_{IV}}$$

these six formulae are due to Walfisz [8]). To the above ten formulae I add ten more:

$$\sum_{n \leqq \omega} \frac{d(n)}{n} \cos 2\pi n x = o\,(\log^2\, \omega), \tag{11_{III}}$$

$$\sum_{n \leqq \omega} \frac{d(n)}{n} \cos 2\pi n x > -A; \tag{12_{III}}$$

$$\sum_{n \leqq \omega} \frac{d(n)}{n} \cos 2\pi n x = \tfrac{1}{2} x x_1 \cdots x_k \log^2\, \omega + O\,(\log\, \omega), \tag{13_{VI}}$$

$$\sum_{n \geqq 1} \frac{d(n)}{n} \sin 2\pi n x \qquad \textit{converges}, \tag{14_{VI}}$$

---

[6]) A denotes a positive constant, different at different occurrences.

[7]) [8]) Loc. cit. in footnotes [1]) and [2]).

(15VI) $$\sum_{n\leqq\omega} d(n)\cos 2\pi nx = xx_1\cdots x_k\,\omega\log\,\omega + O(\omega),$$

(16VI) $$\sum_{n\leqq\omega} d(n)\sin 2\pi nx = O(\omega^{\frac{1}{2}}\log\,\omega);$$

(17VII) $$\sum_{n\leqq\omega} d(n)\,e^{2\pi inx} = O(\omega^{\frac{1}{2}}\log^{2+K}\omega),$$

and, conversely, if

(1. 22) $$\sum_{n\leqq\omega} d(n)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 2\pi nx = \Omega(\omega^{\frac{1}{2}}\log^{2+K}\omega) \qquad (K>0),$$

then there is an infinite sequence of values of r for which

$$a_r > A(K)\,r^{1+K};$$

(18VIII) $$\sum_{n\leqq\omega} d(n)\,e^{2\pi inx} = O(\omega^{H}\log\,\omega),$$

where $H = (4K+\log 2)/(4K+2\log 2)$; and, conversely, if

(1. 23) $$\sum_{n\leqq\omega} d(n)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 2\pi nx = \Omega(\omega^{H}) \qquad (\tfrac{1}{2}<H<1),$$

then there is an infinite sequence of values of r for which

$$a_r > A(H)\,e^{Kr}, \qquad \text{where} \qquad K = (H-\tfrac{1}{2})\log 2/(2-2H).$$

The condition for the convergence of the series (10) may be stated with precision:

(19III) $$\sum_{n\geqq 1}\frac{d(n)}{n}\cos 2\pi nx \quad \textit{converges if and only if}$$

$$\sum_{r\geqq 0} x\,x_1\cdots x_{r-1}\log^2\frac{1}{x_r} \quad \textit{is convergent}\ ^{9});$$

(20III) $$\sum_{n\geqq 1}\frac{d(n)}{n}\sin 2\pi nx \quad \textit{converges if and only if}$$

$$\sum_{r\geqq 0} (-)^r\,x\,x_1\cdots x_{r-1}\log\frac{1}{x_r} \quad \textit{is convergent}\ ^{9}).$$

It is easy to derive rather more convenient *sufficient* conditions of convergence, and to show that they include (10IV). We have, from (1. 2),

(1. 3) $$a_r a_{r+1} + a_r + 1 > \frac{1}{x_r x_{r+1}} = 1 + \frac{a_r}{x_{r+1}} > 1 + a_r \geqq 2,$$

hence

(1. 4) $$2^{\frac{1}{2}k} < (xx_1\cdots x_k)^{-1}.$$

If p_k/q_k is the $(k+1)^{\text{th}}$ convergent to x,

$$1 + a_k \leqq 1 + a\,a_1\cdots a_k \leqq q_{k+1} < (1+a)(1+a_1)\cdots(1+a_k) \leqq 2^{k+1}\,a\,a_1\cdots a_k,$$

and therefore, if

(1. 5) $$q_{k+1} < \exp\,(Ak^{-2}q_k^{\frac{1}{3}}),$$

we have

$$\log x_k^{-1} < \log\,(1+a_k) < Ak^{-2}2^{\frac{1}{3}k}(a\,a_1\cdots a_{k-1})^{\frac{1}{3}}$$
$$< Ak^{-2}(xx_1\cdots x_{k-1})^{-1}.$$

---

9) A null product indicates unity.

Thus (1. 5) is a sufficient condition for the convergence of (20). Similarly

$$q_{k+1} < \exp\,(Ak^{-1}q_k^{\frac{1}{6}}) \tag{1. 6}$$

is a sufficient condition for the convergence of (19). In particular, if x is algebraic of degree n we have, by Liouville's theorem [10]),

$$\frac{A_{(n)}}{q_k^{n+1}} < \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}},$$

i. e., $q_{k+1} < A_{(n)}q_k^n$, and (1. 6) is satisfied for all values of n.
Thus (10_{IV}) is a consequence of (19) and (20).

It may be observed also that (5_{II}) is a corollary of (17_{VII}), for by a theorem due to Borel [11]) almost all numbers are included in class VII, if $K > 0$.

I prove all these results with the exception of (1_I), the simplest of them all, and (6_{II}), one of the most difficult [11a]). These both escape the power of my method for the same reason, that the error-term in Theorem 1 is too crude. There is some (slight) reason to suppose that the error-term may be improved; by a formula due to Ramanujan [12]) it may be shown to be [13]) $O(\omega^{\frac{1}{3}}\log\omega)$ — and even less rapidly increasing — when x is rational [14]).

2. The formulae (2)—(5) and (7)—(20) are fairly simple consequences of the two theorems which follow; in contradistinction to the work of Chowla and, more especially, of Walfisz, which in places involves considerable arithmetical detail, the deduction employs only quite simple arithmetic.

Theorem 1. *If* $0 < x \leqq 1$ *and* (i) $\omega > 1 + A$, $\omega x^2 > A$, *then*

$$\sum_{n\leqq\omega} d(n)\,e^{2\pi inx} = \frac{1}{x}\sum_{n\leqq\omega x^2} d(n)\,e^{-2\pi in/x} + O(\omega^{\frac{1}{2}}\log\omega); \tag{2. 1}$$

(ii) *if* $\omega \geqq 1$, $\omega x^2 < A < 1$, *then*

$$\sum_{n\leqq\omega} d(n)\,e^{2\pi inx} = \frac{1}{2\pi ix}\left\{(\log\omega + 2\gamma)(e^{2\pi ix\omega} - 1) + \int_0^{2\pi x\omega}(1 - e^{it})\,\frac{dt}{t}\right\} \tag{2. 11}$$

$$+ \Delta_1(\omega)\,e^{2\pi ix\omega} + O(\omega^{\frac{1}{4}}), \tag{2. 12}$$

where γ *is Euler's constant, and*

$$\Delta_1(\omega) = \sum_{n\leqq\omega} d(n) - \omega(\log\omega + 2\gamma - 1) = O(\omega^{\frac{1}{2}})\ [15]). \tag{2. 13}$$

The error-terms are uniform with respect to x.

I use the symbol $\mathfrak{F}(x)$ to denote a function [16]), different at different occurrences, but always independent of ω, and always continuous in the closed interval $0 \leqq x \leqq 1$.

---

[10]) See, for example, Perron, Irrationalzahlen (Leipzig 1921), Satz 69.

[11]) É. Borel, Rend. di Palermo **27** (1909), 247—271 (269). See also F. Bernstein, Math. Annalen **71** (1912), 417—439 (430), Borel, Math. Annalen **72** (1912), 578—584 (583), and Bernstein, ibid., 585—587.

[11a]) A much simplified proof of (6_{II}), and indeed of rather more, has now been published: S. Chowla and A. Walfisz, Proc. London Math. Soc. (2) **34** (1932), 401—413.

[12]) S. Ramanujan, Messenger of Math. **45** (1916), 81—84; Collected Papers (Cambridge 1927), No. 17 (Formula H).

[13]) But not uniformly with respect to x.

[14]) It follows that (16_{VI}) may be improved, to the same extent.

[15]) This crude inequality (due to Dirichlet, — Werke **2**, 51—66) is sufficient for my purpose, except at one point — in (4. 6).

[16]) Not necessarily real.

Theorem 2. *If* $0 < x \leqq 1$, $\omega \geqq 1$, $N = \omega x^2$, *and* (i) *if* $N > A$, *then*

$$\sum_{n \leqq \omega} \frac{d(n)}{n} e^{2\pi i n x} = x \sum_{n \leqq N} \frac{d(n)}{n} e^{-2\pi i n/x} + \mathfrak{F}(x) + \frac{1}{2} \log^2 \frac{1}{x} + \left(\gamma - \log 2\pi + \frac{1}{2}\pi i\right) \log \frac{1}{x} + O(N^{-\frac{1}{5}})\ ^{17}); \tag{2. 2}$$

(ii) *if* $N < A < 1$, *then*

$$\sum_{n \leqq \omega} \frac{d(n)}{n} e^{2\pi i n x} = \mathfrak{F}(x) + \int_1^{\omega} (\log t + 2\gamma)\, e^{2\pi i x t} \frac{dt}{t} + O(\omega^{-\frac{1}{7}})\ ^{17}), \tag{2. 21}$$

in both cases uniformly with respect to x.

3. Proof of Theorem 1.

I start from a special case of Voronoï's summation-formula [18]),

$$\sum_{n \leqq \omega}{}' d(n)\, e^{2\pi i n x} = \frac{1}{4} + \int_0^{\omega} (\log t + 2\gamma)\, e^{2\pi i x t}\, dt \tag{3. 1}$$

$$+ 2\pi \sum_{n \geqq 1} d(n) \int_0^{\omega} M_0\{4\pi\sqrt{(nt)}\}\, e^{2\pi i x t}\, dt\,, \tag{3. 11}$$

where the dash denotes that, if ω is an integer, the term $n = \omega$ is to be halved, and

$$M_\nu(z) = -\,Y_\nu(z) + (2/\pi)\, K_\nu(z)\,,$$

a Bessel function of the third kind. I shall also require the function

$$L_1(z) = -\,Y_1(z) - (2/\pi)\, K_1(z)\,,$$

and the relations

$$\frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{t}{n}\right)^{\frac{1}{2}} L_1(4\pi\sqrt{(nt)})\right\} = 2\pi\, M_0\{4\pi\sqrt{(nt)}\}\,, \tag{3. 21}$$

$$\frac{d}{dt}\, M_0\{4\pi\sqrt{(nt)}\} = -\,2\pi\left(\frac{n}{t}\right)^{\frac{1}{2}} M_1\{4\pi\sqrt{(nt)}\}\,. \tag{3. 22}$$

In the first place, if we integrate by parts the integral on the right of (3. 1), we obtain the right-hand side of (2. 11), and this last is clearly $O(\omega^{\frac{1}{2}} \log \omega)$ if $\omega x^2 > A$, $\omega > 1 + A$. We have to show that (3. 11) is equal to the expression on the right of (2. 1) or to (2. 12).

Lemma 1. *If* $n > 0$, $x > 0$, *then*

$$2\pi \int_0^{\infty} M_0\{4\pi\sqrt{(nt)}\}\, e^{2\pi i x t}\, dt = \frac{1}{x}\, e^{-2\pi i n/x} + O\left(\frac{x}{n^2}\right). \tag{3. 3}$$

Expanding the Bessel function, and integrating term by term, we have, if $\Im q > 0$, $a > 0$,

$$\int_0^{\infty} M_0\{2\sqrt{(at)}\}\, e^{iqt}\, dt = \frac{1}{q}\cos\frac{a}{q} - \frac{2i}{\pi q}\left\{\left(\gamma + \log\frac{a}{q}\right)\cos\frac{a}{q} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-)^m}{2m!}\left(\frac{a}{q}\right)^{2m}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2m}\right)\right\}. \tag{3. 31}$$

---

[17]) These two error-terms can easily be sharpened, but they are sufficient for my purpose.

[18]) G. Voronoï, Annales de l'École Normale (3) **21** (1904), 207—267, 459—533 (529); A. L. Dixon and W. L. Ferrar, Quart. J. of Math. (Oxford) **2** (1931), 31—54 (54).

Since both sides are continuous functions of q as $\Im q \to 0$ ($\Re q \neq 0$), (3. 31) is true when q is real, and it is not difficult to deduce (3. 3). But instead of doing this I give another, somewhat less elementary, proof.

By Hardy's integral [19]) for $M_0(z)$ we have, if $\Re p > 0$,

$$\int_0^\infty e^{-pt} M_0\{2\sqrt{(at)}\}\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-pt}\,dt \int_0^\infty \cos au \cos\frac{t}{u}\frac{du}{u}. \tag{3. 32}$$

If we write the inner integral as

$$\int_1^\infty \Big(\cos au \cos\frac{t}{u} + \cos\frac{a}{u}\cos tu\Big)\frac{du}{u},$$

it is evident [20]) that change of order of integration is permissible, and (3. 32) is equal to

$$\frac{2p}{\pi}\int_0^\infty \frac{u\cos au}{p^2u^2+1}\,du = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos au}{pu-i}\,du - \frac{i}{p}\,e^{-a/p}.$$

We may now make $p \to -iq$ ($q > 0$), and obtain, after an integration by parts [21]),

$$\int_0^\infty M_0\{2\sqrt{(at)}\}\,e^{iqt}\,dt = \frac{1}{q}\,e^{-ia/q} + \frac{2iq}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin u\,du}{(qu+a)^2}, \tag{3. 33}$$

and this includes (3. 3).

By the asymptotic expansions of the Bessel functions we have, if $nt > A$,

$$M_0\{4\pi\sqrt{(nt)}\} = O\{(nt)^{-\frac{1}{4}}\}, \tag{3. 41}$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ M_1 \end{matrix}\{4\pi\sqrt{(nt)}\} = \frac{\sin\left\{4\pi\sqrt{(nt)} + \frac{1}{4}\pi\right\}}{\pi\sqrt{2}(nt)^{\frac{1}{4}}} + O\{(nt)^{-\frac{3}{4}}\}. \tag{3. 42}$$

Lemma 2. *Let*

$$J_n = 2\pi\int_0^\omega M_0\{4\pi\sqrt{(nt)}\}\,e^{2\pi ixt}\,dt, \tag{3. 5}$$

then, with an error $O(x/n^2)$, (i) *if* $1 \leqq n \leqq N = x^2\omega$,

$$J_n = x^{-1}\,e^{-2\pi ix/n} + R_n, \tag{3. 51}$$

and, (ii) *if* $n > N > A$,

$$J_n = (\omega/n)^{\frac{1}{2}}\,L_1\{4\pi\sqrt{(n\omega)}\}\,e^{2\pi ix\omega} + R_n, \tag{3. 52}$$

where

$$R_n = O(x^{-\frac{1}{2}}n^{-\frac{1}{4}}N^{-\frac{1}{4}}), \quad \text{if} \quad 1 \leqq n < (1-A)N, \tag{3. 53}$$

$$R_n = \frac{\exp\left\{2\pi ix^{-1}(N - 2N^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{4}\pi i\right\}}{2\pi i\sqrt{(2x)}\,(\sqrt{N}-\sqrt{n})} + O\Big(\frac{x^{\frac{1}{2}}N^{\frac{3}{2}}}{|N-n|^3}\Big) + O\Big(\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{N^{\frac{1}{2}}}\Big), \tag{3. 54}$$

and

$$R_n = O(x^{-\frac{1}{2}}N^{\frac{1}{2}}\,|N-n|^{-1}), \tag{3. 541}$$

if $AN < n < AN$ $(n \neq N)$,

---

[19]) G. H. Hardy, Messenger of Math. **40** (1911), 44—51; G. N. Watson, Theory of Bessel functions (Cambridge 1922), 184.

[20]) See, for example, E. W. Hobson, Theory of functions of a real variable (Cambridge 1926) **2**, 348.

[21]) There is not much difficulty in reconciling (3. 31) and (3. 33).

(3. 55) $\qquad R_n = O(x^{-1}),\ \textit{if}\ N - A\sqrt{(Nx)} < n < N + A\sqrt{(Nx)}\,,$

(3. 56) $\qquad R_n = O(x^{-\frac{1}{2}} N^{\frac{3}{4}} n^{-\frac{5}{4}}),\quad \textit{if}\quad n > (1+A)N\,.$

By Lemma 1, (3. 22) and (3. 41—2) we have, if $n \leqq N$,

$$R_n = -2\pi \int_\omega^\infty M_0\{4\pi\sqrt{(nt)}\}\, e^{2\pi i x t}\, dt$$

$$= M_0\{4\pi\sqrt{(n\omega)}\}\, \frac{e^{2\pi i x\omega}}{ix} + \frac{2\pi i}{x}\int_\omega^\infty \Big(\frac{n}{t}\Big)^{\frac{1}{2}} M_1\, e^{2\pi i x t}\, dt$$

(3. 6) $$= \frac{in^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}}{x}\int_\omega^\infty \sin\Big\{4\pi\sqrt{(nt)} + \frac{\pi}{4}\Big\}\frac{e^{2\pi i x t}}{t^{\frac{3}{4}}}\, dt + O(x^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{4}} N^{-\frac{1}{4}})\,.$$

If the product of the sine and $e^{2\pi i x t}$ is expressed as the difference of two exponentials, the integral of one of them is easily seen to be included under the error-term; the other is

(3. 61) $$\frac{in^{\frac{1}{4}}}{2\pi x\sqrt{2}}\int_\omega^\infty \frac{d}{dt}\exp 2\pi i\Big\{xt - 2\sqrt{(nt)} - \frac{1}{8}\Big\}\frac{dt}{xt^{\frac{3}{4}} - n^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{4}}}\,,$$

and, on integrating by parts and employing the second theorem of the mean, (3. 61) is seen to be equal to (3. 54), if $AN < n < AN$.

To obtain (3. 55), write (3. 61) in the form

(3. 62) $$-\frac{n^{\frac{1}{4}}}{x\sqrt{2}}\int_\omega^\infty \exp 2\pi i\Big\{xt - 2\sqrt{(nt)} - \frac{1}{8}\Big\}\frac{dt}{t^{\frac{3}{4}}}\,,$$

and put

$$t = (n/x^2)(1+\sqrt{\tau})^2;$$

the result of making this substitution is

$$-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(2x^3)}}\int_{\{\sqrt{(N/n)}-1\}^2}^\infty (1+\sqrt{\tau})^{-\frac{1}{2}}\exp\Big\{\frac{2\pi i n}{x}(\tau-1) - \frac{\pi i}{4}\Big\}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}$$

$$= -\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(2x^3)}}\int_{\{\sqrt{(N/n)}-1\}^2}^\infty \exp\Big\{\frac{2\pi i n}{x}(\tau-1) - \frac{\pi i}{4}\Big\}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} + O\Big\{\frac{1}{\sqrt{(xn)}}\Big\}$$

$$= -\frac{e^{-2\pi i n/x}}{2x} + O\Big(\frac{n^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}\Big)\int_0^{\{\sqrt{(N/n)}-1\}^2}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} + O\Big\{\frac{1}{\sqrt{(xn)}}\Big\}$$

(3. 63) $$= O(x^{-1}),\quad \text{if}\quad |N-n| < A\sqrt{(Nx)}.$$

If $n < AN < N$, (3. 61) is $O(x^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{4}} N^{-\frac{3}{4}}) = O(x^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{4}} N^{-\frac{1}{4}})$.

If $n > N$, on integrating J_n by parts, we have by (3. 21) and (3. 52),

(3. 64) $$R_n = -2\pi i x\int_0^\omega \Big(\frac{t}{n}\Big)^{\frac{1}{2}} L_1\{4\pi\sqrt{(nt)}\}\, e^{2\pi i x t}\, dt.$$

The part of the integral for which $t < 1/n$ and (3. 42) is not available is easily seen to be $O(x/n^2)$, and is therefore negligible. For the rest, the proof of (3. 54—6) follows very closely the lines of the proof just given when $n \leqq N$. In place of (3. 62) we have

(3. 65) $$\frac{x}{n^{\frac{3}{4}}\sqrt{2}}\int_0^\omega t^{\frac{1}{4}}\exp\frac{2\pi}{i}\Big\{2\sqrt{(nt)} - xt + \frac{1}{8}\Big\}dt,$$

and the appropriate substitution is

$$t = (n/x^2)(1 - \sqrt{\tau})^2.$$

The result is to leave (3. 63) unchanged.

Coming now to the proof of the theorem, since $x\Sigma d(n)/n^2 = O(1)$, we see that (3. 11) is equal to

$$\sum_{n\leqq 1} d(n)\, J_n = \frac{1}{x}\sum_{n\leqq N} d(n)\, e^{-2\pi i x/n} \tag{3. 7}$$

$$+ e^{2\pi i x\omega}\sum_{n>N} d(n)\left(\frac{\omega}{n}\right)^{\frac{1}{2}} L_1\{4\pi\sqrt{(n\omega)}\} + \sum_{n\leqq 1} d(n)\, R_n + O(1), \tag{3. 71}$$

by (3. 51—2). If

$$\Delta(\omega) = \sum_{n\leqq\omega}{}' d(n) - \omega(\log\omega + 2\gamma - 1) - \frac{1}{4} = \Delta_1(\omega) - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}d(\omega),$$

where $d(\omega) = 0$ if ω is not an integer, we have, by the special case of (3. 1) when $x = 0$,

$$\Delta(\omega) = \sum_{n\leqq 1} d(n)\left(\frac{\omega}{n}\right)^{\frac{1}{2}} L_1\{4\pi\sqrt{(n\omega)}\}. \tag{3. 72}$$

Hence the first sum in (3. 71) is equal to

$$\Delta(\omega) - \sum_{n\leqq N} d(n)\left(\frac{\omega}{n}\right)^{\frac{1}{2}} L_1\{4\pi\sqrt{(n\omega)}\}$$
$$= \Delta(\omega) + O\{\omega^{\frac{1}{4}}\Sigma n^{-\frac{3}{4}} d(n)\} = O(\omega^{\frac{1}{2}}\log\omega),$$

by partial summation.

Let P, Q be chosen to satisfy the inequalities

$$AN < P^2 < (1 - A)N < (1 + A)N < Q^2 < AN.$$

Then, by (3. 53) and (3. 56),

$$\sum_{n<P^2} d(n)\, R_n = O(\omega^{\frac{1}{2}}\log\omega), \qquad \sum_{n>Q^2} d(n)\, R_n = O(\omega^{\frac{1}{2}}\log\omega);$$

and, by (3. 541) and (3. 55), we have

$$R_n = O\left\{\frac{x^{-\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{2}}}{|N - n| + \sqrt{(Nx)}}\right\} \qquad (P^2 \leqq n \leqq Q^2). \tag{3. 73}$$

It is evident from a figure that

$$\sum_{P^2\leqq n\leqq Q^2} d(n)\, R_n = 2\Big\{\sum_{1\leqq h\leqq P}\ \sum_{P^2/h\leqq k\leqq Q^2/h} R_{hk} \tag{3. 74}$$

$$+ \sum_{P<h\leqq Q}\ \sum_{h\leqq k\leqq Q^2/h} R_{hk}\Big\} - \sum_{P\leqq h\leqq Q} R_{h^2}. \tag{3. 75}$$

It is an easy matter to verify, by means of (3. 73), that (3. 75) is $O(\omega^{\frac{1}{2}}\log\omega)$. And the part of the repeated sum on the right of (3. 74) for which

$$N - A\sqrt{(Nx)} < hk < N + A\sqrt{(Nx)}$$

is, by (3. 55),

$$O\left(\frac{1}{x}\right)\sum_{1\leqq h\leqq P}\left(\frac{\sqrt{(Nx)}}{h} + 1\right) = O(\omega^{\frac{1}{2}}\log\omega).$$

In the remainder of (3. 74) we employ (3. 54), and observe in the first place that the sums of the two error-terms [22]) over

[22]) Multiplied by $d(n)$, before being summed.

$$AN < n < N - \sqrt{(Nx)} \quad \text{and} \quad N + \sqrt{(Nx)} < n < AN$$

are, in both cases, $O(\omega^{\frac{1}{2}} \log \omega)$. There remains for consideration

$$(3.\,76)\quad \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{1 \leqq h \leqq P} \left\{ \left(\sum_{P^2/h \leqq k \leqq (\sqrt{N}-\sqrt{x})^2/h} + \sum_{(\sqrt{N}+\sqrt{x})^2/k \leqq h \leqq Q^2/h} \right) \frac{\exp\,(-4\pi i(\omega hk)^{\frac{1}{2}})}{|\sqrt{N} - \sqrt{(hk)}|} \right\}.$$

Lemma 3 [23]). *Under the conditions stated for P and Q*

$$(3.\,76) = O(\omega^{\frac{1}{2}} \log \omega).$$

It will be sufficient to write out the proof for one of the two inner sums. We have, by the Euler-Maclaurin sum-formula [24]),

$$(3.\,8)\quad \sum_{P^2/h \leqq k \leqq (\sqrt{N}-\sqrt{x})^2/h} \frac{\exp\{-4\pi i \sqrt{(\omega hk)}\}}{\sqrt{N} - \sqrt{(hk)}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) +$$

$$(3.\,81)\quad + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{P^2/h}^{(\sqrt{N}-\sqrt{x})^2/h} \frac{\exp\{-4\pi i \sqrt{(\omega ht)}\}}{\sqrt{N} - \sqrt{(ht)}}\, e^{2\pi i n t}\, dt\,.$$

Neglect of the error-term causes an error

$$O(x^{-1}\sqrt{N}) = O(\omega^{\frac{1}{2}})$$

in (3. 76). In (3. 81) put

$$ht = N(1-v)^2, \quad \sqrt{(x/N)} = \xi, \quad P = (1-a)\sqrt{N} \quad (0 < a < 1);$$

then (3. 81) is equal to

$$(3.\,82)\quad \frac{2\sqrt{N}}{h} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{\xi}^{a} \exp\left\{\frac{2\pi i}{h} Nn(1-v)^2 - \frac{4\pi i}{x} N(1-v)\right\} \frac{1-v}{v}\, dv\,.$$

Consider first the part of the sum (3. 82) for which $|n| \geqq 2h/x$; for these values of n we obtain, on integrating by parts,

$$O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{2\pi\sqrt{N}} \sum_{|n| \geqq 2h/x} \frac{1}{n} \int_{\xi}^{a} \exp\left\{\frac{2\pi i N n}{h}(1-v)^2 - \frac{4\pi i N}{x}(1-v)\right\} \left\{\frac{4\pi N v}{x} + i\right\} \frac{dv}{v^2}\,,$$

since the partial sums of $\Sigma\, n^{-1} \sin 2n\pi y$ are uniformly bounded. As in (3. 8) the error-term may be neglected. In the integral we use the second theorem of the mean, and obtain the sum of two expressions of the form

$$(3.\,83)\quad \frac{N}{x^{\frac{3}{2}}} \sum_{|n| \geqq 2h/x} \frac{1}{n} \int_{\xi}^{a'} \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} \left\{\frac{2\pi N n}{h}\left(1 - \frac{h}{nx} - v\right)^2 - \mu\right\} dv \qquad (\xi \leqq a' \leqq a)\,,$$

where $\mu = 2\pi Nh/(nx^2)$, and two expressions of the same form, but multiplied by ξ. We suppose that $a < \frac{1}{2}$; then

$$\sqrt{w} = 1 - \frac{h}{nx} - v \geqq \frac{1}{2} - a > A$$

throughout the interval of integration. On changing the variable to w, it is then evident that (3. 83) is

---

[23]) It is evident that (3. 76) is $O(\omega^{\frac{1}{2}} \log^2 \omega)$; but the extra $\log \omega$ in the error-term would considerably affect the usefulness of the theorem. Lemma 3 is an almost immediate consequence of a difficult theorem due to van der Corput. — See footnote [26]).

[24]) Dirichlet, Werke 1, 474—5. $\sum_{-\infty}^{\infty}$ means $\lim_{\nu \to \infty} \sum_{-\nu}^{\nu}$.

$$O\left(\frac{N}{x^{\frac{3}{2}}}\sum_{n>h/x}\frac{h}{Nn^2}\right)=O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right),$$

which, as before, may be neglected.

The part of (3. 76) which corresponds to $n=0$ in (3. 82) is clearly

$$x^{-\frac{1}{2}}\sum_{1\leqq h\leqq P}O\left(\frac{N}{h\sqrt{x}}\cdot\frac{x}{N}\right)=O\Big(\sum_{1\leqq h\leqq P}\frac{1}{h}\Big)=O(\log\omega),$$

and may be neglected. There remains

$$(3.\,84)\qquad \frac{2\sqrt{N}}{h}\sum_{1\leqq|n|<2h/x}\int_{\xi}^{a}\frac{1-v}{v}\exp\left\{\frac{2\pi iNn}{h}\Big(1-\frac{h}{nx}-v\Big)^2-i\mu\right\}dv\,.$$

By the argument employed in the case of (3. 83) the sum of the terms of (3. 84) for which n is negative is

$$O\left(\frac{N}{h\sqrt{x}}\sum_{n<2h/x}\frac{h}{Nn}\right)=O(x^{-\frac{1}{2}}\log\omega),$$

and neglect of these terms produces an error $O(\omega^{\frac{1}{2}}\log\omega)$ in (3. 76). Also, since

$$(3.\,85)\qquad \int_{\alpha}^{\beta}e^{iyw^2}\,dw=O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\qquad(y>0)$$

uniformly with respect to α and β [25]), $(1-v)/v$ in (3. 84) may be replaced by $1/v$, with an error

$$O\left\{\frac{\sqrt{N}}{h}\sum_{n<2h/x}\sqrt{\Big(\frac{h}{Nn}\Big)}\right\}=O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

We are left with

$$(3.\,86)\qquad \frac{2\sqrt{N}}{h}\sum_{1\leqq n\leqq 2h/x}\int_{\xi}^{a}\exp\left\{\frac{2\pi iNn}{h}\Big(1-\frac{h}{nx}-v\Big)^2-i\mu\right\}\frac{dv}{v}\,.$$

(i) If $h/nx\geqq 1-\xi$, put

$$\sqrt{w}=v+(h/nx)-1;$$

then the contribution to (3. 76) of the part of the sum (3. 86) for which $n\leqq h/\{x(1-\xi)\}$ is

$$(3.\,87)\qquad \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{x}}\sum_{1\leqq h\leqq P}\frac{1}{h}\sum_{n}\int\exp\Big(\frac{2\pi iNn}{h}\,w-i\mu\Big)\frac{dw}{\sqrt{w}\{\sqrt{w}+1-(h/nx)\}}\,,$$

where the limits of integration are

$$\Big(\xi+\frac{h}{nx}-1\Big)^2\ \text{ to }\ \Big(a+\frac{h}{nx}-1\Big)^2.$$

By (3. 85) and the second theorem of the mean (3. 87) is

$$(3.\,88)\qquad O\left\{\sum_{1\leqq h\leqq P}\sum_{1\leqq n<n_x}\frac{1}{h-nx(1-\xi)}\right\}+O\left\{\frac{N}{x}\sum_{1\leqq h\leqq P}\frac{1}{h}\sqrt{\Big(\frac{h}{Nn_x}\Big)}\right\}=O(\omega^{\frac{1}{2}}\log\omega),$$

where $n_x=[h/\{x(1-\xi)\}]$.

(ii) If $h/nx\leqq 1-a$, put

$$\sqrt{w}=1-(h/nx)-v;$$

then an argument similar to that in case (i) disposes of this part of (3. 86) [26]).

---

[25]) This is a known (and very simple) theorem. See, for example, Wilton, J. London Math. Soc. **2** (1927), 177—180 (179).

[26]) To this point (as stated in footnote [23])) Lemma 3 is a very simple special case of van der Corput's approxi-

(iii) There still remains for consideration the part of (3. 86) for which

$$n_x < n \leqq n_x' = [h/\{x(1-a)\}].$$

In this case $1-(h/nx)$ lies between ξ and a; we therefore divide the integral in (3. 86) into two parts, in one of which we use the substitution of case (i), in the other that of case (ii). The resulting contribution to (3. 76) is

$$(3.89)\quad \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{x}} \sum_{1\leqq h\leqq P} \frac{1}{h} \sum_{n_x<n\leqq n_x'} \int_0 \exp\left(\frac{2\pi i N n}{h} w - i\mu\right) \frac{dw}{\sqrt{w}\{1-(h/nx) \pm \sqrt{w}\}},$$

where the alternative sign denotes the sum of two integrals, and the upper limit of integration is

$$\left(a + \frac{h}{nx} - 1\right)^2 \text{ or } \left(1 - \xi - \frac{h}{nx}\right)^2,$$

according as the sign is positive or negative. The integral in (3. 89) is equal to

$$(I_1 + I_2)/\{1-(h/nx)\},$$

where

$$I_1 = \int \exp(\cdots) \frac{dw}{\sqrt{w}}, \quad I_2 = \mp \int \exp(\cdots) \frac{dw}{1-(h/nx) \pm \sqrt{w}},$$

so that

$$I_1 = O\left\{\sqrt{\left(\frac{h}{Nn}\right)}\right\} = O\left\{\sqrt{\left(\frac{x}{N}\right)}\right\}, \quad I_2 = O\left\{\sqrt{\left(\frac{N}{x}\right)\frac{h}{Nn}}\right\} = O\left\{\sqrt{\left(\frac{x}{N}\right)}\right\}.$$

Thus (3. 89) is

$$O\left\{\sum_{1\leqq h\leqq P} \frac{1}{h} \sum_{n_x<n\leqq n_x'} \frac{nx}{nx-h}\right\} = O\left\{\sum\sum \frac{1}{nx-h}\right\} = O(\omega^{\frac{1}{2}} \log \omega).$$

This completes the proof of Lemma 3, and with it of Theorem 1, except that it has been assumed throughout that $N \geqq 1$, and in (3. 83) it is assumed that $\xi \leqq a$, i. e., (if $x = 1$) $N > A$. But, if $A < N < A$, we have, by Lemma 2,

$$R_n = O(x^{-1}), \text{ if } n < 2N, \qquad R_n = O(x^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{5}{4}}), \text{ if } n \geqq 2N,$$

so that, by (3. 7) and (3. 71), we have

$$\sum_{n\geqq 1} d(n) J_n = O\left(\frac{1}{x}\right) + e^{2\pi i x\omega} \Delta(\omega) = O(\omega^{\frac{1}{2}}).$$

Finally, if $N < A < 1$, the right-hand side of (3. 7) is null, and

$$\sum_{n\geqq 1} d(n) J_n = \Delta(\omega) e^{2\pi i x\omega} + \frac{N^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x}} O\left\{\sum_{n\geqq 1} d(n) n^{-\frac{5}{4}}\right\} = \Delta(\omega) e^{2\pi i x\omega} + O(\omega^{\frac{1}{4}}) = O(\omega^{\frac{1}{2}}).$$

This completes the proof of Theorem 1.

4. Proof of Theorem 2.

The proof of Theorem 2 follows fairly closely that of Theorem 1, but is easier, since Lemma 3 is not required.

Lemma 4. *If* $n > 0, x > 0$, *then*

$$(4.1)\quad 2\pi \int_0^\infty M_0\{4\pi\sqrt{(nt)}\} \frac{1-e^{2\pi i x t}}{t} dt = -\frac{x}{n} e^{-2\pi i n/x} + O\left(\frac{x^2}{n^2}\right).$$

---

mate functional equation, Math. Zeitschrift **28** (1928), 238—300. But van der Corput's theorem is so general, and the proof so complicated, that it would take nearly as long to show how it applies to the particular case as it has done to work it out independently.

The proof consists in integrating (3. 3) with respect to x, changing the order of integration on the left, and integrating by parts on the right. The change of order presents no difficulty. It is important for the application of (4. 1) to recognize that the term $O(x^2/n^2)$ is a continuous function of x in $x \geqq 0$. This follows readily from (3. 33).

In this case I start from a trivial modification of Voronoï's summation formula, namely

$$\sum_{n\leqq\omega}{}' d(n)\frac{e^{2\pi inx}}{n} = \int_{\frac{1}{2}}^{\omega}(\log t + 2\gamma)\frac{e^{2\pi ixt}}{t}\,dt - \tag{4. 2}$$

$$-2\pi\sum_{n\leqq N} d(n)\int_0^{\infty} M_0\{4\pi\sqrt{(nt)}\}\frac{1-e^{2\pi ixt}}{t}\,dt + \tag{4. 21}$$

$$+2\pi\sum_{n>N} d(n)\int_{\frac{1}{2}}^{\omega} M_0\frac{e^{2\pi ixt}}{t}\,dt + \tag{4. 22}$$

$$+2\pi\sum_{n\leqq N} d(n)\left\{\int_0^{\frac{1}{2}} M_0\frac{1-e^{2\pi ixt}}{t}\,dt - \right. \tag{4. 23}$$

$$\left. -\int_{\omega}^{\infty} M_0\frac{e^{2\pi ixt}}{t}\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} M_0\frac{dt}{t}\right\}, \tag{4. 24—5}$$

where, as before, $N = \omega x^2$, and for the present we suppose that $N > A$. In this case the integral on the right of (4. 2) is

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\omega}\cdots = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty}\cdots + O\left(\frac{\log\omega}{\sqrt{\omega}}\right),$$

and

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}\cdots = \int_{\pi x}^{\infty}\left(\log t + 2\gamma - \log 2\pi + \log\frac{1}{x}\right)\frac{e^{it}}{t}\,dt$$

$$= \log\frac{1}{x}\int_0^{\infty}\frac{e^{it}-e^{-t}}{t}\,dt + \mathfrak{F}(x) - \log\frac{1}{x}\left(\int_0^1\frac{1-e^{-t}}{t}\,dt - \int_1^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\right)$$

$$+\frac{1}{2}\log^2\frac{1}{x} + (2\gamma - \log 2\pi)\log\frac{1}{x},$$

which is in agreement with (2. 2). To complete the proof of (2. 2) we have, then, to show that (4.22—5) are together equal to

$$\mathfrak{F}(x) + O(N^{-\frac{1}{5}}). \tag{4. 3}$$

(i) In the first place, on integrating by parts, we have (4. 22)

$$= \sum_{n>N} d(n)\left\{\left[\left(\frac{t}{n}\right)^{\frac{1}{2}} L_1(4\pi\sqrt{(nt)})\frac{e^{2\pi ixt}}{t}\right]_{\frac{1}{2}}^{\omega}\right. \tag{4. 4}$$

$$\left. -\int_{\frac{1}{2}}^{\omega}\left(\frac{t}{n}\right)^{\frac{1}{2}} L_1(4\pi\sqrt{(nt)})\,(2\pi ixt-1)\,\frac{e^{2\pi ixt}}{t^2}\,dt\right\}$$

$$= \frac{\Delta(\omega)}{\omega}e^{2\pi ix\omega} + O\left(\frac{\log\omega}{\sqrt{\omega}}\right) + O\left\{\frac{\log(N+1)}{N^{\frac{1}{4}}}\right\}\ ^{27})$$

---

[27]) This term arises from (4. 4) when $t = \frac{1}{2}$. See Wilton, Proc. Royal Soc. (A) **134** (1931), 192—202 (Theo-

$$+\sqrt{2}\sum_{n>N}\frac{d(n)}{n^{\frac{3}{4}}}\int_{\frac{1}{2}}^{\omega}\exp 2\pi i\left\{xt-2\sqrt{(nt)}-\frac{1}{8}\right\}\left(x-\frac{1}{2\pi it}\right)\frac{dt}{t^{\frac{3}{4}}}$$

$$=O\left\{\frac{\log(N+1)}{N^{\frac{1}{4}}}\right\}+O\left\{\sum_{n>N+1}\frac{d(n)}{n^{\frac{1}{4}}(n-N)}\right\}=O(N^{-\frac{1}{5}})\ ^{28}).$$

(ii) By Voronoï's summation formula (4. 23) is equal to

$$\frac{1}{2}\pi ix-\int_0^{\frac{1}{2}}(\log t+2\gamma)\frac{1-e^{2\pi ixt}}{t}\,dt-2\pi\sum_{n>N}d(n)\int_0^{\frac{1}{2}}M_0\frac{1-e^{2\pi ixt}}{t}\,dt$$

$$=\mathfrak{F}(x)-2(1-e^{i\pi x})\sum_{n>N}d(n)(2n)^{-\frac{1}{2}}L_1\{2\pi\sqrt{(2n)}\}$$

$$-\sum_{n>N}d(n)\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{n}\right)^{\frac{1}{2}}L_1(\cdots)\{1-(1-2\pi ixt)\,e^{2\pi ixt}\}\frac{dt}{t^2}$$

$$=\mathfrak{F}(x)+O\{N^{-\frac{1}{4}}\log(N+1)\},$$

since the real and imaginary parts of

$$\{1-(1-2\pi ixt)\,e^{2\pi ixt}\}/t^2$$

are both of uniformly bounded variation [29]) in $(0,\frac{1}{2})$, and

$$2\pi\int\left(\frac{t}{n}\right)^{\frac{1}{2}}L_1\,dt=\frac{t}{n}M_2=\begin{cases}O(n^{-\frac{5}{4}}), & \text{if } t>0,\\ O(n^{-2}), & \text{if } t\to+0.\end{cases}$$

(iii) By the second mean value theorem and Lemma 2, (4. 24)

$$=O\left(\frac{1}{\omega}\right)\left\{\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{N^{\frac{1}{4}}}\sum_{n\leqq N}\frac{d(n)}{n^{\frac{1}{4}}}+\frac{N^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}\sum_{n\leqq N-1}\frac{d(n)}{N-n}+O\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$$

$$=O(\omega^{\varepsilon-\frac{1}{2}})+O\{(x\omega)^{-1}\}=O(N^{-\frac{1}{4}})\qquad(0<\varepsilon\leqq\tfrac{1}{4}).$$

(iv) In the case of (4. 25) we integrate twice by parts, and obtain

$$(4.5)\quad -\sum_{n\leqq N}d(n)\left\{\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}L_1(2\pi\sqrt{(2n)})-\frac{1}{n\pi}M_2(2\pi\sqrt{(2n)})+\frac{1}{n\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}\frac{M_2}{t^2}\,dt\right\}$$

$$=C+O\{N^{-\frac{1}{4}}\log(N+1)\},$$

where C is a definite constant, the limit of (4. 5) as $N\to\infty$. This completes the proof of (2. 2).

If $N<A<1$, (4. 21) and (4. 23—5) are null, while (4. 22) is equal to (4. 4)

$$=\frac{\Delta(\omega)}{\omega}e^{2\pi ix\omega}-2\Delta\left(\frac{1}{2}\right)e^{i\pi x}-2\pi ix\int_{\frac{1}{2}}^{\omega}\Delta(t)\,\frac{e^{2\pi ixt}}{t}\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}\Delta(t)\,\frac{e^{2\pi ixt}}{t^2}\,dt+O\left(\frac{1}{\sqrt{\omega}}\right)$$

$$(4.6)\qquad=\mathfrak{F}(x)+O(\omega^{-\frac{1}{2}})+O\left\{x\int_{\frac{1}{2}}^{\omega}t^{-\frac{2}{3}}\log(t+1)\,dt\right\}$$

$$(4.61)\qquad=\mathfrak{F}(x)+O\{\omega^{-\frac{1}{6}}\log(\omega+1)\},$$

---

rem 3). In equation (2.4) (of the paper just referred to) the term $O(x^{\varepsilon})$ does not occur if x is in a closed interval from which the integers are excluded, and in the case under consideration $x=\frac{1}{2}$.

[28]) Actually $O(N^{-\frac{1}{4}+\varepsilon})$ for every $\varepsilon>0$.

[29]) The real part is, in fact, monotonic (it may change sign) and the imaginary part has at most one stationary point in $(0,\frac{1}{2})$.

where, in (4. 61), I have used the well-known inequality [30]),

$$\Delta(t) = O\{t^{\frac{1}{3}} \log (t+1)\} \qquad (t > A),$$

and the fact that $x < \omega^{-\frac{1}{2}}$. The proof of Theorem 2 is now complete.

5. The case when x is rational.

In case x is rational, and given by (1. 21), we apply (2. 1) or (2. 2) $k+1$ times [31]), assuming that

$$\omega > (x x_1 \cdots x_k)^{-2}.$$

Then, since $1/x_k = a_k$, an integer, it follows that

$$(5.1_{\text{VI}}) \qquad \sum_{n \leqq \omega} d(n)\, e^{2\pi i n x} = \frac{1}{x x_1 \cdots x_k} \sum_{n \leqq \omega_{k+1}} d(n) + O(\omega^{\frac{1}{2}} \log \omega),$$

and that

$$(5.2_{\text{VI}}) \qquad \sum_{n \leqq \omega} \frac{d(n)}{n} e^{2\pi i n x} = x x_1 \cdots x_k \sum_{n \leqq \omega_{k+1}} \frac{d(n)}{n} + X(x) + O(\omega^{-\frac{1}{5}}),$$

where

$$(5.3) \qquad \omega_{k+1} = (x x_1 \cdots x_k)^2 \omega, \qquad \omega_1 = N,$$

and $X(x)$ is a definite (complex) number depending upon x.

By (2. 13), (16_{VI}) and rather more than (15_{VI}) follow from (5. 1); and (14_{VI}) and a little more than (13_{VI}) follow from (5. 2).

Although it involves ideas somewhat foreign to the spirit of this paper I append a proof of the statement made in footnote [14]), namely that, if x is rational,

$$(21_{\text{VI}}) \qquad \sum_{n \leqq \omega} d(n) \sin 2\pi n x = O(\omega^{\frac{1}{3}} \log \omega).$$

Let $x = p/q$, and for convenience write $q\omega$ instead of ω. We have, since $d(n) = O(n^{\varepsilon})$ if $\varepsilon > 0$,

$$(5.4) \qquad \sum_{n \leqq q\omega} d(n) \sin \frac{2\pi p n}{q} = \sum_{r=1}^{q-1} \sin \frac{2\pi p r}{q} \sum_{0 \leqq m < \omega} d(mq + r) + O(\omega^{\varepsilon})$$

$$= \sum_{r=1}^{q-1} \alpha_r(q) \sin \frac{2\pi p r}{q} \cdot \omega (\log \omega + 2\gamma - 1)$$

$$+ \sum_{r=1}^{q-1} \beta_r(q) \sin \frac{2\pi p r}{q} \cdot \omega + O(\omega^{\frac{1}{3}} \log \omega)$$

$$(5.5) \qquad = \alpha(p, q)\, \omega \log \omega + \beta(p, q)\, \omega + O(\omega^{\frac{1}{3}} \log \omega),$$

by a formula due to Ramanujan [32]), where $\alpha_r(q)$, $\beta_r(q)$ are constants (independent of ω) whose precise value is (known but) immaterial. A comparison of (5. 5) with (16_{VI}) shows that

$$\alpha(p, q) = \beta(p, q) = 0.$$

It is evident that the error-term in (15_{VI}) may be improved by Ramanujan's formula — to the same extent as in (16_{VI}).

---

[30]) Voronoï, Journal für Math. **126** (1903), 241—282.

[31]) It is here that we first employ the method originated by Hardy and Littlewood, loc. cit. [3]), 212—3.

[32]) Loc. cit. in footnote [12]).

6. The case of irrational x.

When x is irrational let ω_k $(k = 1, 2, \ldots)$ be given by (5. 3), then for a given x and a given ω we may [33]) choose m so that

$$\omega_m \geqq 1, \qquad \omega_{m+1} < 1. \tag{6. 1}$$

We now apply (2. 1) m times and (2. 11) once; in (2. 11) we have ω_m, x_m instead of ω, x, and $\pm i$ according as m is even or odd. The sum of the error-terms in the successive applications of (2. 1) and (2. 11) is

$$O(\log \omega)\{\omega^{\frac{1}{2}} + x^{-1}\omega_1^{\frac{1}{2}} + \cdots + (x x_1 \cdots x_{m-1})^{-1}\omega_m^{\frac{1}{2}}\} = O(m\omega^{\frac{1}{2}} \log \omega) = O(\omega^{\frac{1}{2}} \log^2 \omega),$$

by (1. 4) and (6. 1). Hence we have

Theorem 3. *If x is irrational, $0 < x < 1$, $\omega > 1 + A$, and m is given by* (6. 1), *then*

$$\sum_{n \leqq \omega} d(n)\, e^{2\pi i n x} = O(\omega^{\frac{1}{2}} \log^2 \omega) + \tag{6. 2_{III}}$$

$$+ (2\pi x x_1 \cdots x_m)^{-1}\left[(\log \omega_m + 2\gamma)\{\sin 2\pi x_m \omega_m + (-)^m i(1 - \cos 2\pi x_m \omega_m)\}\right.$$

$$\left. - \int_0^{2\pi x_m \omega_m} \{\sin t + (-)^m i(1 - \cos t)\}\frac{dt}{t}\right] \tag{6. 21}$$

$$= O\{\omega^{\frac{1}{2}} \log \omega(a_m + \log \omega)\}; \tag{6. 3_{III}}$$

$$\sum_{n \leqq \omega} d(n)\, e^{2\pi i n x} = O(\omega^{\frac{1}{2}} \log^2 \omega) + O(2^{-\frac{1}{2}m}\omega \log \omega). \tag{6. 4_{III}}$$

Here (6. 3) follows from (6. 2) by (6. 1) and (1. 2); and (6. 4) is a consequence of (1. 4) and the fact that the part of (6. 21) within square brackets is $O(x_m \omega_m \log \omega)$.

It is at once evident that it is impossible to deduce (1) and (6) from Theorem 3. On the other hand (2), (3), (5), (7), (17) and (18) are all straightforward deductions from it.

(2_{III}). This is an immediate consequence of (6. 4), since $m \to \infty$ with ω.

(17_{VII}) [34]). In this case

$$a_m < A m^{1+K} < A \log^{1+K} \omega,$$

by (1. 4); hence (17) is an immediate corollary of (6. 3). For the converse we see that, if (1. 22) is true, there must be an infinite sequence of values of ω for which

$$a_m > A \log^{1+K} \omega > A \log^{1+K}(x x_1 \cdots x_{m-1})^{-2} > A \log^{1+K} 2^{m-1} > A(K) m^{1+K}.$$

(18_{VIII}). Here we have $a_m < e^{Km}$; and on equating the error-terms in (6. 3) and (6. 4) we obtain

$$(2K + \log 2)\, m = \log A + \log \omega,$$

which leads at once to (18). On the other hand, if (1. 23) is true, there must be an infinite sequence of values of ω for which

$$2^{-\frac{1}{2}m} > A\, \omega^{H-1},$$

and

$$a_m > A\, \omega^{H-\frac{1}{2}} > A(H)\, 2^{\frac{1}{2}m(H-\frac{1}{2})/(1-H)} > A(H)\, e^{Km}.$$

(3_{V}) and (7_{V}). These formulae lie somewhat deeper than the rest, but the proofs involve very little arithmetical detail. There is clearly no loss of generality if we assume that

$$\omega^{\frac{1}{4}} \Phi(\omega) > 1 \quad (\omega > 1). \tag{6. 5}$$

---

[33]) Following Hardy and Littlewood, loc. cit., footnotes [3]) and [31]).

[34]) This, it will be remembered, includes (5_{II}).

With this assumption I construct a set of irrational x, a sequence $\omega^{(k)}$ such that

$$(6.51) \qquad s_k + is_k' = \sum_{n \leqq \omega^{(k)}} d(n)\, e^{2\pi i n x} > (1+i)\Phi\{\omega^{(k)}\}\,\omega^{(k)} \log \omega^{(k)},$$

and a second sequence such that

$$(6.52) \qquad -s_k - is_k' > (1+i)\Phi\{\omega^{(k)}\}\,\omega^{(k)} \log \omega^{(k)},$$

where the notation of (6.51—2) is to be understood to mean that the real and imaginary parts of the left-hand side are (respectively) greater than the real and imaginary parts of the right-hand side.

Let (m_k) be a sequence of increasing positive integers, containing infinitely many values which are odd and infinitely many which are even. I place no restriction on a_r if $r \neq m_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, and put

$$a_{m_k} = M_k,$$

where M_1 is arbitrary, and the sequence (M_k) is defined as follows. — Assuming that $M_1, \ldots, M_{k-1}$ have been defined, let

$$(6.61) \qquad \mu_k = \max_{r<m_k} (a_r + 1),$$

and let M_k be the least integer satisfying the inequality

$$(6.62) \qquad 6\pi\Phi(M_k) \leqq \mu_k^{-m_k}.$$

If $r < m_k - 1$, we have, by (6.61) and (1.3)

$$\mu_k^2 \geqq \mu_k + (\mu_k - 1)^2 \geqq 1 + a_r + a_r a_{r+1} > (x_r x_{r+1})^{-1},$$

$$(x x_{m_k-1})^{-1} < \mu_k^2.$$

Hence, if $k \geqq 3$,

$$(6.63) \qquad 4 \leqq 2^{m_k-1} < (x x_1 \cdots x_{m_k-1})^{-2} < \mu_k^{2m_k} \leqq \{6\pi\Phi(M_k)\}^{-2} < M_k^{\frac{1}{2}},$$

by (6.5). Now choose the sequence $\omega^{(k)}$ by the conditions

$$(6.64) \qquad x_{m_k}\omega^{(k)}_{m_k} = \tfrac{1}{4}, \quad \text{if } m_k \text{ is even},$$

$$(6.65) \qquad x_{m_k}\omega^{(k)}_{m_k} = \tfrac{3}{4}, \quad \text{if } m_k \text{ is odd}.$$

Then I say that (6.51) is satisfied by the sequence for which m_k is even, and (6.52) by the sequence for which m_k is odd, if k is sufficiently large $(k \geqq k_0)$.

We have, if $k \geqq 3$,

$$M_k \geqq \tfrac{3}{4}(M_k + 1) > \omega^{(k)}_{m_k} = (\tfrac{1}{4} \text{ or } \tfrac{3}{4})\, x^{-1}_{m_k} > \tfrac{1}{4} M_k,$$

and therefore, by (6.63),

$$(6.66) \qquad M_k^{\frac{3}{2}} > \omega^{(k)} > M_k,$$

and, as is obvious from (6.5) and (6.62),

$$\log \omega^{(k)}_{m_k} > \log \tfrac{1}{4} M_k > \tfrac{3}{4} \log M_k > \tfrac{1}{2} \log \omega^{(k)} \qquad (k \geqq 3).$$

Let $\Omega_k = \sqrt{\omega^{(k)}} \log^2 \omega^{(k)}$; then from (6.21) we have (according as m_k is even or odd)

$$\begin{aligned} \pm s_k \\ \pm s_k' \end{aligned} > \frac{\log \omega^{(k)} - A}{4\pi x x_1 \cdots x_{m_k}} - A\Omega_k$$

$$> (3\pi)^{-1} x x_1 \cdots x_{m_k-1}\, \omega^{(k)} \{\log \omega^{(k)} - A\} - A\Omega_k \qquad (6.64\text{—}5)$$

$$> 2\Phi(M_k)\,\omega^{(k)} \{\log \omega^{(k)} - A\} - A\Omega_k \qquad (6.62\text{—}3)$$

$$> \Phi\{\omega^{(k)}\}\,\omega^{(k)} \log \omega^{(k)}, \qquad (6.66)$$

if $k \geqq k_0$, where the notation indicates that both s_k and s_k' satisfy the inequality.

7. In the same way as Theorem 3 is derived from Theorem 1, we derive from (2. 2) and (2. 21)

Theorem 4. *If x is irrational, $0 < x < 1$, $\omega > 1 + A$, and m is given by* (6. 1), *then*

$$\sum_{n \leqq \omega} \frac{d(n)}{n} \cos 2\pi n x = \mathfrak{F}(x) + o(1) + X_{m-1} \tag{7. 1$_{\text{III}}$}$$

$$+ x x_1 \cdots x_{m-1} \int_1^{\omega m} \frac{\log t + 2\gamma}{t} \cos 2\pi x_m t \, dt, \tag{7. 11}$$

$$\sum_{n \leqq \omega} \frac{d(n)}{n} \sin 2\pi n x = \mathfrak{F}(x) + o(1) + \frac{1}{2}\pi X'_{m-1} \tag{7. 2$_{\text{III}}$}$$

$$+ (-)^m x x_1 \cdots x_{m-1} \log \frac{1}{x_m} \int_0^{2\pi x_m \omega_m} \frac{\sin t}{t} \, dt, \tag{7. 21}$$

where

$$X_m = \frac{1}{2}\left(\log^2 \frac{1}{x} + x \log^2 \frac{1}{x_1} + \cdots + x x_1 \cdots x_{m-1} \log^2 \frac{1}{x_m}\right) \tag{7. 31}$$

$$- (\log 2\pi - \gamma)\left(\log \frac{1}{x} + x \log \frac{1}{x_1} + \cdots + x x_1 \cdots x_{m-1} \log \frac{1}{x_m}\right),$$

$$X'_m = \log \frac{1}{x} - x \log \frac{1}{x_1} + \cdots + (-)^m x x_1 \cdots x_{m-1} \log \frac{1}{x_m}. \tag{7. 32}$$

I recall the meaning assigned to $\mathfrak{F}(x)$ in the sentence immediately preceding the statement of Theorem 2. The proof of (7. 1) and (7. 2) then consists in the observations that

(i)
$$\begin{aligned} &\mathfrak{F}(x) + x\mathfrak{F}(x_1) + \cdots + x x_1 \cdots x_{m-1} \mathfrak{F}(x_m) \\ &\quad = \sum_{k \geqq 0} x x_1 \cdots x_{k-1} \mathfrak{F}(x_k) + O(2^{-\frac{1}{2}m}) \qquad (1. 4) \\ &\quad = \mathfrak{F}(x) + o(1), \end{aligned}$$

(ii) $\omega_1^{-1/5} + x\omega_2^{-1/5} + \cdots + x x_1 \cdots x_{m-2} \omega_m^{-1/5} + x x_1 \cdots x_{m-1} \omega_m^{-1/7} = o(1)$,

and

(iii) $$x x_1 \cdots x_{m-1} \left\{ \int_0^{2\pi x_m \omega_m} \frac{\log t + 2\gamma - \log 2\pi}{t} \sin t \, dt - \int_0^1 \frac{\log t + 2\gamma}{t} \sin 2\pi x_m t \, dt \right\} = o(1).$$

(20$_{\text{III}}$). Since

$$\pi > \int_0^{\xi} \frac{\sin t}{t} \, dt > 0, \quad \text{if } \xi > 0,$$

(20) is an immediate consequence of (7. 2).

(9$_{\text{III}}$). It is clear from (6. 1) and (1. 4) that

$$X'_{m-1} = o(\log \omega). \tag{7. 33$_{\text{III}}$}$$

If $\omega \sqrt{x_m} \geqq 1$, we have $\log (1/x_m) \leqq 2 \log \omega$, and

$$(7. 21) = o(\log \omega);$$

if, on the other hand, $\omega \sqrt{x_m} < 1$,

$$(7. 21) = o\{\omega_m \sqrt{x_m} \cdot \sqrt{x_m} \log (1/x_m)\} = o(1).$$

This proves (9).

(8_V). The argument employed in the proof of (3) and (7) requires only trivial modification in order to establish (8). In place of (6. 5) we assume that

$$\Phi(\omega)\log^{\frac{1}{2}}\omega > 1 \qquad (\omega \geqq 3), \tag{7. 4}$$

and (this is not essential), in place of (6. 64—5),

$$x_{m_k}\omega_{m_k}^{(k)} = \frac{1}{2}, \quad \text{for both odd and even } m_k. \tag{7. 5}$$

Then, in place of $M_k^{\frac{1}{2}}$, we have $\log M_k$ on the right of (6. 63); hence

$$\operatorname*{Max}_{r<m_k}\log\frac{1}{x_r} < \operatorname{Max}\frac{1}{x_r} < \sqrt{\log M_k} < \sqrt{\log \omega^{(k)}},$$

and it follows that

$$X'_{m-1} = o\{\sqrt{\log \omega^{(k)}}\} = o\{\Phi(\omega^{(k)}))\log \omega^{(k)}\}. \tag{7. 51$_V$}$$

On the other hand

$$xx_1\cdots x_{m_k-1}\log\frac{1}{x_{m_k}}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt > 3\Phi(M_k)\log M_k$$

$$> 2\Phi\{\omega^{(k)}\}\log \omega^{(k)} \qquad (k > A), \tag{7. 52}$$

and (8) is a consequence of (7. 51—2).

(4_V). No modification of the sequence $\omega^{(k)}$ just employed in the proof of (8) is required in order to prove (4). We have

$$X_{m-1} = o\{\log \omega^{(k)}) = o\{\Phi(\omega^{(k)})\log^2 \omega^{(k)}\}. \tag{7. 6$_V$}$$

And, if $x\omega = A$,

$$\int_1^{\omega}\frac{\log t + 2\gamma}{t}(1-\cos 2\pi xt)\,dt < 2\pi^2x^2\int_1^{\omega}t(\log t + 2\gamma)\,dt = O\{\log(1/x)\}; \tag{7. 7}$$

hence, when $m = m_k$, (7. 11) is equal to

$$xx_1\cdots x_{m_k-1}\{\tfrac{1}{2}\log^2 x_m^{-1} + O(\log x_m^{-1})\} > 9\Phi(M_k)(\log^2 M_k - A\log M_k)$$
$$> 2\Phi\{\omega^{(k)}\}\log^2\omega^{(k)},$$

if $k > A$.

(12_{III}). It is evident that there is no Ω_L formula corresponding to (4_V); in fact, if $\omega x > 1$, we have

$$\int_1^{\omega}\frac{\log t + 2\gamma}{t}\cos 2\pi xt\,dt = \frac{1}{2}\log^2\frac{1}{x} + 2\gamma\log\frac{1}{x}$$

$$-\int_1^{1/x}\frac{\log t + 2\gamma}{t}(1-\cos 2\pi xt)\,dt + \int_{1/x}^{\omega}\frac{\log t + 2\gamma}{t}\cos 2\pi xt\,dt$$

$$> \frac{1}{2}\log^2\frac{1}{x} - \pi^2\log\frac{1}{x} - x\log\frac{1}{x}\operatorname*{Max}_{(\xi)}\int_{1/x}^{\xi}\cos 2\pi xt\,dt - A$$

$$> \frac{1}{2}\log^2(1/x) - A\log(1/x) - A > -A,$$

and, if $\omega x \leqq 1$, the same result follows from (7. 7). And, evidently, $X_{m-1} > -A$. This proves (12).

(19_{III}). The remark that

$$\int_{1/x}^{\omega} \frac{\log t + 2\gamma}{t} \cos 2\pi x t \, dt = O\left(\log \frac{1}{x}\right)$$

suffices to establish (19); for, if $x_m \omega_m > \frac{1}{4}$, the integral in (7. 11) is equal to

(7. 71) $$\tfrac{1}{2} \log^2 x_m^{-1} + O(\log x_m^{-1}),$$

and, if $x_m \omega_m \leqq \frac{1}{4}$, the integral is positive and

(7. 72) $$< \tfrac{1}{2} \log^2 \omega_m + 2\gamma \log \omega_m < \tfrac{1}{2} \log^2 (1/x_m).$$

It will be remembered that (19) and (20) together imply (10_{IV}).

(11_{III}). Finally we have, by (6. 1) and (1. 4),

($7. 8_{\text{III}}$) $$X_{m-1} = o(\log^2 \omega),$$

and, by (7. 71—2),

($7. 11_{\text{III}}$) $$= o(\log^2 \omega).$$

This proves (11).

Adelaide, 19. IV. 32.

Eingegangen 5. Juni 1932.

Über die Schläflischen Modulargleichungen.

Von *G. N. Watson* in Birmingham. *)

1. Einleitung.

Das Werk, durch das der vorzügliche Schweizer Mathematiker Ludwig Schläfli (geb. 15. Januar 1814 zu Graßwyl im Kanton Bern, gest. 20. März 1895) am besten bekannt ist, ist wahrscheinlich seine Entdeckung der Doppelsechsseiten unter den 27 Geraden einer Oberfläche dritter Ordnung; er beschränkte sich jedoch nicht auf die Geometrie, sondern hat in mehreren Zweigen der Mathematik Untersuchungen ausgeführt. Außer seinen Arbeiten über die orthogonalen Systeme von Flächenscharen und über die Räume konstanter Krümmung hat er bedeutende Arbeiten über konforme Abbildung, die Riccatische Gleichung, Kugelfunktionen, Zylinderfunktionen, und insbesondere über Modulargleichungen verfaßt.

Schläfli hat eine neue Art von Modulargleichungen untersucht [1]) und hat diese systematisch für die Fälle gebildet, wo der Transformationsgrad n eine kleine Primzahl (3, 5, 7, 11, 13, 17, 19) ist.

Die Arbeit von Schläfli hat Weber [2]) weitergeführt und hat aus der Theorie der Klasseninvarianten die Transformationsgleichungen für den 23-sten Transformationsgrad und für den 47-sten Transformationsgrad abgeleitet.

Neuerdings hat Berry [3]) die Transformationsgleichungen in den Fällen $n = 29$, 31, 37 gebildet.

In meiner gegenwärtigen Abhandlung bilde ich einige Schläflische Modulargleichungen, deren Transformationsgrad eine zusammengesetzte Zahl (ein Quadrat) ist, nämlich $n = 9, 25, 49$. Diese Modulargleichungen sind beim Konstruieren gewisser singulärer Moduln (oder Klasseninvarianten) sehr nützlich. In Verbindung mit der Bestimmung der letzten Gleichung ($n = 49$) habe ich eine kubische Gleichung für die neue Klasseninvariante $f(\sqrt{-89})$ konstruiert (vgl. § 7); die Gleichungen für die Klasseninvarianten $f(\sqrt{-199})$, $f(\sqrt{-271})$, $f(\sqrt{-311})$, $f(\sqrt{-367})$, $f(\sqrt{-383})$ halte ich für eine spätere Abhandlung zurück.

2. Die Schläflischen Modulargleichungen.

Es sei

$$q = e^{i\pi\tau},$$

*) Sektionsvortrag auf dem Internationalen Mathematikerkongreß in Zürich 1932.

[1]) Schläfli, Journal für Math. **72** (1870), S. 360—369.

[2]) Weber, Math. Annalen **43** (1893), S. 185—196.

[3]) Berry, American Journal of Math. **30** (1908), S. 156—169.

$$f(\tau) = q^{-\frac{1}{24}} \prod_{r=1}^{\infty} (1 + q^{2r-1}) = \left(\frac{1}{4} k k'\right)^{-\frac{1}{12}},$$

$$f_1(\tau) = q^{-\frac{1}{24}} \prod_{r=1}^{\infty} (1 - q^{2r-1}) = \left(\frac{4 k'^2}{k}\right)^{\frac{1}{12}},$$

$$f(\tau)\, f_1(\tau)\, f_2(\tau) = \sqrt{2}\,,$$

$$2^{-\frac{1}{4}} f(\sqrt{-m}) = G_m\,, \qquad (m \text{ ungerade})$$

$$2^{-\frac{1}{4}} f_1(\sqrt{-m}) = g_m\,, \qquad (m \text{ gerade})$$

in den gewöhnlichen Bezeichnungen der Theorie der elliptischen Funktionen. Dann ist die Beziehung zwischen $f(\tau)$ und $f(n\tau)$ die Schläflische [1]) Modulargleichung für den Transformationsgrad n.

Aus der Ersetzung von q durch $-q$ hat Weber [2]) die „zugeordneten Gleichungen" zwischen $f_1(\tau)$ und $f_1(n\tau)$ gefolgert.

3. Der Transformationsgrad $n = 9$.

Man findet die Modulargleichung für den neunten Transformationsgrad durch Elimination aus zwei Modulargleichungen für den dritten Transformationsgrad. Es sei

$$u = 2^{-\frac{1}{4}} f(\tau), \quad x = 2^{-\frac{1}{4}} f(3\tau), \quad v = 2^{-\frac{1}{4}} f(9\tau).$$

Dann sind die Schläflischen Beziehungen zwischen u und x, sowie zwischen x und v:

$$x^{12} - 8^{\frac{1}{2}} u^9 x^9 + 8^{\frac{1}{2}} u^3 x^3 + u^{12} = 0,$$
$$x^{12} - 8^{\frac{1}{2}} v^9 x^9 + 8^{\frac{1}{2}} v^3 x^3 + v^{12} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen müssen wir x eliminieren. Betrachten wir zunächst das allgemeine Problem der Elimination von x^3 aus den zwei biquadratischen Gleichungen:

$$\sum_{r=0}^{4} a_r x^{12-3r} = 0, \qquad \sum_{r=0}^{4} b_r x^{12-3r} = 0.$$

Wenn

$$a_r b_s - a_s b_r = [r, s]$$

gesetzt wird, ist die Bézoutsche Eliminante [3])

$$\begin{vmatrix} [0,1] & [0,2] & [0,3] & [0,4] \\ [0,2] & [0,3]+[1,2] & [0,4]+[1,3] & [1,4] \\ [0,3] & [0,4]+[1,3] & [1,4]+[2,3] & [2,4] \\ [0,4] & [1,4] & [2,4] & [3,4] \end{vmatrix} = 0.$$

Im speziellen Falle haben wir

$$[0,1] = -8^{\frac{1}{2}}(v^9 - u^9), \quad [0,3] = 8^{\frac{1}{2}}(v^3 - u^3), \quad [0,4] = v^{12} - u^{12},$$
$$[1,3] = 8 u^3 v^3 (v^6 - u^6), \quad [1,4] = -8^{\frac{1}{2}} u^9 v^9 (v^3 - u^3), \quad [3,4] = 8^{\frac{1}{2}} u^3 v^3 (v^9 - u^9),$$
$$[0,2] = [1,2] = [2,3] = [2,4] = 0.$$

Die Entwicklung der Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta & \delta & \varepsilon \\ \beta & \delta & \varepsilon & 0 \\ \gamma & \varepsilon & 0 & \zeta \end{vmatrix}$$

---

[1]) Schläfli, Journal für Math. **72** (1870), S. 360—369.

[2]) Weber, Algebra **3** (1908), S. 264.

[3]) Bézout, Mém. Acad. de Paris, 1764, S. 286.

ist

$$-\alpha\varepsilon^3 - \zeta\beta - \alpha\zeta\delta^2 + \alpha\beta\varepsilon\zeta - \beta\varepsilon\gamma^2 + \beta^2\varepsilon^2 + \gamma^2\delta^2 - 2\beta\gamma\delta\varepsilon,$$

folglich findet man nach Herauswerfen des unbrauchbaren Faktors $(u^3 - v^3)^4$ die Modulargleichung für $n = 9$ in der Form

$$\begin{aligned}
&64\left(u^{12}v^{12} + \frac{1}{u^{12}v^{12}}\right)\left(\frac{u^3}{v^3} + 1 + \frac{v^3}{u^3}\right)\\
&\quad = 8\left(\frac{u^3}{v^3} + 1 + \frac{v^3}{u^3}\right)^2\left\{\left(\frac{u^3}{v^3} + 2 + \frac{v^3}{u^3}\right)\left(\frac{u^3}{v^3} + 8 + \frac{v^3}{u^3}\right)^2 + 8\right\}\\
&\quad + 8\left(\frac{u^3}{v^3} + 2 + \frac{v^3}{u^3}\right)\left(\frac{u^3}{v^3} + \frac{v^3}{u^3}\right)^2 + 64\\
&\quad + \left(\frac{u^3}{v^3} + \frac{v^3}{u^3}\right)^2\left(\frac{u^3}{v^3} + 2 + \frac{v^3}{u^3}\right)^2\left(\frac{u^3}{v^3} + 8 + \frac{v^3}{u^3}\right)^2\\
&\quad + 16\left(\frac{u^3}{v^3} + \frac{v^3}{u^3}\right)\left(\frac{u^3}{v^3} + 2 + \frac{v^3}{u^3}\right)\left(\frac{u^3}{v^3} + 8 + \frac{v^3}{u^3}\right).
\end{aligned}$$

Daher ist die Transformationsgleichung im Falle $n = 9$

$$\begin{aligned}
&64\left(u^{12}v^{12} + \frac{1}{u^{12}v^{12}}\right)\left(\frac{u^3}{v^3} + 1 + \frac{v^3}{u^3}\right)\\
&\quad = \left(\frac{u^{18}}{v^{18}} + \frac{v^{18}}{u^{18}}\right) + 28\left(\frac{u^{15}}{v^{15}} + \frac{v^{15}}{u^{15}}\right) + 298\left(\frac{u^{12}}{v^{12}} + \frac{v^{12}}{u^{12}}\right) + 1548\left(\frac{u^9}{v^9} + \frac{v^9}{u^9}\right)\\
&\quad + 4383\left(\frac{u^6}{v^6} + \frac{v^6}{u^6}\right) + 7704\left(\frac{u^3}{v^3} + \frac{v^3}{u^3}\right) + 9324,\\
&u = 2^{-\frac{1}{4}}f(\tau), \qquad v = 2^{-\frac{1}{4}}f(9\tau).
\end{aligned}$$

4. Der Transformationsgrad $n = 25$.

Man findet die Modulargleichung für den 25-sten Transformationsgrad durch Elimination aus zwei Modulargleichungen für den fünften Transformationsgrad. Es sei

$$u = 2^{-\frac{1}{4}}f(\tau), \qquad x = 2^{-\frac{1}{4}}f(5\tau), \qquad v = 2^{-\frac{1}{4}}f(25\tau).$$

Dann sind die Schläflischen Beziehungen zwischen u und x, sowie zwischen x und v:

$$\begin{aligned}
x^6 - 2u^5x^5 + 2ux + u^6 &= 0,\\
x^6 - 2v^5x^5 + 2vx + v^6 &= 0.
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen müssen wir x eliminieren. Betrachten wir zunächst das allgemeine Problem der Elimination von x aus den zwei Gleichungen sechsten Grades:

$$\sum_{r=0}^{6} a_r x^{6-r} = 0, \qquad \sum_{r=0}^{6} b_r x^{6-r} = 0.$$

Die Methode, die Bézoutsche Eliminante zu bilden, ist die folgende: Wenn

$$a_r b_s - a_s b_r = [r, s]$$

gesetzt wird, betrachten wir die drei Matrizes

$$\left\|\begin{array}{cccccc}
[0,1] & [0,2] & [0,3] & [0,4] & [0,5] & [0,6]\\
[0,2] & [0,3] & [0,4] & [0,5] & [0,6] & [1,6]\\
[0,3] & [0,4] & [0,5] & [0,6] & [1,6] & [2,6]\\
[0,4] & [0,5] & [0,6] & [1,6] & [2,6] & [3,6]\\
[0,5] & [0,6] & [1,6] & [2,6] & [3,6] & [4,6]\\
[0,6] & [1,6] & [2,6] & [3,6] & [4,6] & [5,6]
\end{array}\right\|,$$

$$\begin{Vmatrix} [1,2] & [1,3] & [1,4] & [1,5] \\ [1,3] & [1,4] & [1,5] & [2,5] \\ [1,4] & [1,5] & [2,5] & [3,5] \\ [1,5] & [2,5] & [3,5] & [4,5] \end{Vmatrix}, \qquad \begin{Vmatrix} [2,3] & [2,4] \\ [2,4] & [3,4] \end{Vmatrix}$$

und addieren die Elemente der zwei kleinen Matrizes zu den Elementen im Zentrum der großen Matrix. Die Bézoutsche Eliminante ist die Gleichung, die man durch Nullsetzen der Determinante der so gewonnenen Matrix erhält.

Im speziellen Falle teilen wir die Zeilen der Determinante durch die entsprechenden Zahlen, nämlich $(uv)^{-5}(u-v)^{\frac{1}{2}}$, $(uv)^{-\frac{5}{2}}(u-v)^{\frac{1}{2}}$, $(u-v)^{\frac{1}{2}}$, $(uv)^{\frac{5}{2}}(u-v)^{\frac{1}{2}}$, $(uv)^{5}(u-v)^{\frac{1}{2}}$, $(uv)^{\frac{15}{2}}(u-v)^{\frac{1}{2}}$ und die Spalten durch dieselben Zahlen. Die Eliminante wird somit

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \delta & \varepsilon \\ 0 & 0 & \beta & \delta & \varepsilon & 0 \\ 0 & \beta & \delta & \varepsilon & 0 & 0 \\ \beta & \delta & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & \zeta \end{vmatrix} = 0,$$

wobei

$$\alpha = +2u^{12}v^{12}\left(\frac{u^2}{v^2}+\frac{u}{v}+1+\frac{v}{u}+\frac{v^2}{u^2}\right),$$

$$\zeta = -2u^{-12}v^{-12}\left(\frac{u^2}{v^2}+\frac{u}{v}+1+\frac{v}{u}+\frac{v^2}{u^2}\right),$$

$$\beta = -2, \qquad \varepsilon = +2,$$

$$\gamma = -\left(\sqrt{\frac{u}{v}}+\sqrt{\frac{v}{u}}\right)\left(\frac{u^2}{v^2}+1+\frac{v^2}{u^2}\right),$$

$$\delta = -\left(\sqrt{\frac{u}{v}}+\sqrt{\frac{v}{u}}\right)\left(\frac{u^2}{v^2}+4\frac{u}{v}+1+4\frac{v}{u}+\frac{v^2}{u^2}\right).$$

Die Entwicklung der letzten Determinante ist

$$\alpha\varepsilon^5+\zeta\beta^5-3\alpha\zeta\beta\varepsilon\delta^2+\alpha\zeta\beta^2\varepsilon^2+\alpha\zeta\delta^4+\beta^3\varepsilon^3 - \beta^2\varepsilon^2\gamma^2-\beta^2\varepsilon^2\delta^2-4\beta^2\varepsilon^2\gamma\delta+2\beta\varepsilon\gamma\delta^3+3\beta\varepsilon\gamma^2\delta^2-\gamma^2\delta^4.$$

Folglich findet man die Modulargleichung für $n = 25$ in der Form

$$\begin{aligned} &64\left(u^{12}v^{12}+\frac{1}{u^{12}v^{12}}\right)\left(\frac{u^2}{v^2}+\frac{u}{v}+1+\frac{v}{u}+\frac{v^2}{u^2}\right) \\ &\quad=48\left(\frac{u}{v}+2+\frac{v}{u}\right)\left(\frac{u^2}{v^2}+\frac{u}{v}+1+\frac{v}{u}+\frac{v^2}{u^2}\right)^2\left(\frac{u^2}{v^2}+4\frac{u}{v}+1+4\frac{v}{u}+\frac{v^2}{u^2}\right)^2 \\ &\quad+64\left(\frac{u^2}{v^2}+\frac{u}{v}+1+\frac{v}{u}+\frac{v^2}{u^2}\right)^2 \\ &\quad+4\left(\frac{u^2}{v^2}+\frac{u}{v}+1+\frac{v}{u}+\frac{v^2}{u^2}\right)^2\left(\frac{u}{v}+2+\frac{v}{u}\right)^2\left(\frac{u^2}{v^2}+4\frac{u}{v}+1+4\frac{v}{u}+\frac{v^2}{u^2}\right)^4 \\ &\quad+64+16\left(\frac{u}{v}+2+\frac{v}{u}\right)\left(\frac{u^2}{v^2}+1+\frac{v^2}{u^2}\right)^2 \\ &\quad+16\left(\frac{u}{v}+2+\frac{v}{u}\right)\left(\frac{u^2}{v^2}+4\frac{u}{v}+1+4\frac{v}{u}+\frac{v^2}{u^2}\right)^2 \\ &\quad+64\left(\frac{u}{v}+2+\frac{v}{u}\right)\left(\frac{u^2}{v^2}+1+\frac{v^2}{u^2}\right)\left(\frac{u^2}{v^2}+4\frac{u}{v}+1+4\frac{v}{u}+\frac{v^2}{u^2}\right) \end{aligned}$$

$$+8\left(\frac{u}{v}+2+\frac{v}{u}\right)^2\left(\frac{u^2}{v^2}+1+\frac{v^2}{u^2}\right)\left(\frac{u^2}{v^2}+4\frac{u}{v}+1+4\frac{v}{u}+\frac{v^2}{u^2}\right)^3$$
$$+12\left(\frac{u}{v}+2+\frac{v}{u}\right)^2\left(\frac{u^2}{v^2}+1+\frac{v^2}{u^2}\right)^2\left(\frac{u^2}{v^2}+4\frac{u}{v}+1+4\frac{v}{u}+\frac{v^2}{u^2}\right)^2$$
$$+\left(\frac{u}{v}+2+\frac{v}{u}\right)^3\left(\frac{u^2}{v^2}+1+\frac{v^2}{u^2}\right)^2\left(\frac{u^2}{v^2}+4\frac{u}{v}+1+4\frac{v}{u}+\frac{v^2}{u^2}\right)^4.$$

Es sei

$$\frac{u}{v}+\frac{v}{u}=A, \qquad u^{12}v^{12}+\frac{1}{u^{12}v^{12}}=B.$$

Dann ist nach Vereinfachungen die Transformationsgleichung im Falle $n=25$

$$64\,B(A^2+A-1)$$
$$=A^{15}+26A^{14}+286A^{13}+1712A^{12}+5903A^{11}+10970A^{10}$$
$$+6784A^9-9576A^8-12577A^7+7822A^6+8582A^5$$
$$-9616A^4-1071A^3+5438A^2-2788A+520,$$

$$A=\frac{f(\tau)}{f(25\tau)}+\frac{f(25\tau)}{f(\tau)}, \qquad B=\frac{f^{12}(\tau)\,f^{12}(25\tau)}{64}+\frac{64}{f^{12}(\tau)\,f^{12}(25\tau)}.$$

Wir schreiben diese Modulargleichung in der Form

$$64\,B(A^2+A-1)=\Phi(A).$$

Man setze $-q$ statt q. Dann ist die zugeordnete Gleichung

$$64\,B_1(A_1^2-A_1-1)=-\Phi(-A_1),$$

wobei

$$A_1=\frac{f_1(\tau)}{f_1(25\tau)}+\frac{f_1(25\tau)}{f_1(\tau)}, \qquad B_1=\frac{f_1^{12}(\tau)\,f_1^{12}(25\tau)}{64}+\frac{64}{f_1^{12}(\tau)\,f_1^{12}(25\tau)}.$$

5. Die mit 25 assoziierten Klasseninvarianten.

In der zugeordneten Gleichung für den 25-sten Transformationsgrad sei

$$25\tau=-m+\sqrt{m^2-50} \qquad (m=1,3,5,7)$$
$$=-m+\sqrt{-n} \qquad (n=49,41,25,1),$$

wobei $n=50-m^2$.

Dann folgt [1])

$$f_1(25\tau)=e^{\frac{m\pi i}{24}}f(\sqrt{-n})=e^{\frac{m\pi i}{24}}2^{\frac{1}{4}}G_n,$$
$$f_1(\tau)=\frac{\sqrt{2}}{f_2(\frac{1}{2}\tau)}=\frac{\sqrt{2}}{f_1(-2/\tau)}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{f_1(m+\sqrt{m^2-50})}=\frac{e^{\frac{m\pi i}{24}}2^{\frac{1}{4}}}{G_n},$$

d. h.

$$A_1=G_n^2+G_n^{-2}, \qquad B_1=-2.$$

Gewisse Lösungen der Gleichung

$$-\Phi(-A_1)+128(A_1^2-A_1-1)=0$$

---

[1]) Weber, Algebra **3** (1908), S. 114.

sind also

$$A_1 = G_n^2 + G_n^{-2} \qquad (n = 49, 41, 25, 1).$$

Nun ist aber [1])

$$G_{49}^2 + G_{49}^{-2} = 2 + \sqrt{7},$$
$$(G_{41}^2 + G_{41}^{-2})^2 - \frac{5+\sqrt{41}}{2}(G_{41}^2 + G_{41}^{-2}) + \frac{7+\sqrt{41}}{2} = 0,$$
$$G_{25}^2 + G_{25}^{-2} = 3, \quad G_1 = 1.$$

Daher sind die Gleichungen kleinsten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten, deren Lösungen $G_n^2 + G_n^{-2}$ $(n = 49, 41, 25, 1)$ sind, in den entsprechenden Fällen:

$$A_1^2 - 4A_1 - 3 = 0,$$
$$A_1^4 - 5A_1^3 + 3A_1^2 + 3A_1 + 2 = 0,$$
$$A_1 - 3 = 0, \quad A_1 - 2 = 0.$$

Nun ist identisch

$$-\Phi(-A_1) + 128(A_1^2 - A_1 - 1)$$
$$\equiv (A_1^2 - 4A_1 - 3)^2(A_1^4 - 5A_1^3 + 3A_1^2 + 3A_1 + 2)^2 (A_1 - 3)^2(A_1 - 2).$$

Die Gleichung

$$-\Phi(-A_1) + 128(A_1^2 - A_1 - 1) = 0$$

enthält also die Gleichungen der Klasseninvarianten $G_n^2 + G_n^{-2}$ als mehrfache Faktoren (ausgenommen den mit G_1 assoziierten unregelmäßigen Faktor) und enthält keine unbrauchbaren Faktoren.

Wir wenden uns nun zu den Klasseninvarianten g_n. Es sei

$$25\tau = -m + \sqrt{m^2 - 50} \qquad (m = 0, 2, 4, 6)$$
$$= -m + \sqrt{-n} \qquad (n = 50, 46, 34, 14),$$

wobei

$$n = 50 - m^2.$$

Dann folgt

$$f_1(25\tau) = e^{\frac{m\pi i}{24}} f_1(\sqrt{-n}) = e^{\frac{m\pi i}{24}} 2^{\frac{1}{4}} g_n,$$
$$f_1(\tau) = \frac{\sqrt{2}}{f_2(\frac{1}{2}\tau)} = \frac{\sqrt{2}}{f_1(-2/\tau)}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{f_1(m + \sqrt{m^2 - 50})} = \frac{e^{\frac{m\pi i}{24}} 2^{\frac{1}{4}}}{g_n},$$

d. h.

$$A_1 = g_n^2 + g_n^{-2}, \quad B_1 = +2.$$

Gewisse Lösungen der Gleichung

$$-\Phi(-A_1) - 128(A_1^2 - A_1 - 1) = 0$$

sind also

[1]) Weber, Algebra **3** (1908), S. 721—723.

$$A_1 = g_n^2 + g_n^{-2} \qquad (n = 50, 46, 34, 14).$$

Nun ist aber [1])

$$g_{50}^3 - g_{50}^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} g_{50} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 0,$$
$$g_{46}^2 + g_{46}^{-2} = 3 + \sqrt{2},$$
$$g_{34}^2 + g_{34}^{-2} = \frac{3+\sqrt{17}}{2},$$
$$g_{14}^2 + g_{14}^{-2} = 1 + \sqrt{2}.$$

Daher sind die Gleichungen kleinsten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten, deren Lösungen $g_n^2 + g_n^{-2} (n = 50, 46, 34, 14)$ sind, in den entsprechenden Fällen:

$$A_1^3 - 4A_1^2 - 3A_1 - 2 = 0, \qquad A_1^2 - 6A_1 + 7 = 0,$$
$$A_1^2 - 3A_1 - 2 = 0, \qquad A_1^2 - 2A_1 - 1 = 0.$$

Nun ist identisch

$$-\Phi(-A_1) - 128(A_1^2 - A_1 - 1)$$
$$\equiv (A_1^3 - 4A_1^2 - 3A_1 - 2)(A_1^2 - 6A_1 + 7)^2 (A_1^2 - 3A_1 - 2)^2 (A_1^2 - 2A_1 - 1)^2.$$

Die Gleichung

$$-\Phi(-A_1) - 128(A_1^2 - A_1 - 1) = 0$$

enthält also die Gleichungen der Klasseninvarianten $g_n^2 + g_n^{-2}$ als mehrfache Faktoren (ausgenommen den mit g_{50} assoziierten unregelmäßigen Faktor) und enthält keine unbrauchbaren Faktoren.

6. Der Transformationsgrad $n = 49$.

Man findet die Form der Modulargleichung für den 49-sten Transformationsgrad durch Elimination aus zwei Modulargleichungen für den siebenten Transformationsgrad. Um die genaue Gleichung zu konstruieren, gebrauchen wir q-Reihen und die mit dem 49-sten Transformationsgrad assoziierten Klasseninvarianten. Es sei

$$u = 2^{-\frac{1}{4}} f(\tau), \quad x = 2^{-\frac{1}{4}} f(7\tau), \quad v = 2^{-\frac{1}{4}} f(49\tau).$$

Dann sind die Schläflischen Beziehungen zwischen u und x sowie zwischen x und v:

$$x^8 - 8^{\frac{1}{2}} u^7 x^7 + 7 u^4 x^4 - 8^{\frac{1}{2}} u x + u^8 = 0,$$
$$x^8 - 8^{\frac{1}{2}} v^7 x^7 + 7 v^4 x^4 - 8^{\frac{1}{2}} v x + v^8 = 0.$$

Aus diesen Gleichungen müssen wir x eliminieren. Betrachten wir zunächst das allgemeine Problem der Elimination von x aus den zwei Gleichungen achten Grades:

$$\sum_{r=0}^{8} a_r x^{8-r} = 0, \qquad \sum_{r=0}^{8} b_r x^{8-r} = 0.$$

Die Methode, die Bézoutsche Eliminante zu bilden, ist die folgende: Wenn

$$a_r b_s - a_s b_r = [r, s]$$

gesetzt wird, betrachten wir die vier Matrizes

---

[1]) Weber, Algebra **3** (1908), S. 721—723.

$$\begin{Vmatrix} [0,1] & [0,2] & [0,3] & [0,4] & [0,5] & [0,6] & [0,7] & [0,8] \\ [0,2] & [0,3] & [0,4] & [0,5] & [0,6] & [0,7] & [0,8] & [1,8] \\ [0,3] & [0,4] & [0,5] & [0,6] & [0,7] & [0,8] & [1,8] & [2,8] \\ [0,4] & [0,5] & [0,6] & [0,7] & [0,8] & [1,8] & [2,8] & [3,8] \\ [0,5] & [0,6] & [0,7] & [0,8] & [1,8] & [2,8] & [3,8] & [4,8] \\ [0,6] & [0,7] & [0,8] & [1,8] & [2,8] & [3,8] & [4,8] & [5,8] \\ [0,7] & [0,8] & [1,8] & [2,8] & [3,8] & [4,8] & [5,8] & [6,8] \\ [0,8] & [1,8] & [2,8] & [3,8] & [4,8] & [5,8] & [6,8] & [7,8] \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} [1,2] & [1,3] & [1,4] & [1,5] & [1,6] & [1,7] \\ [1,3] & [1,4] & [1,5] & [1,6] & [1,7] & [2,7] \\ [1,4] & [1,5] & [1,6] & [1,7] & [2,7] & [3,7] \\ [1,5] & [1,6] & [1,7] & [2,7] & [3,7] & [4,7] \\ [1,6] & [1,7] & [2,7] & [3,7] & [4,7] & [5,7] \\ [1,7] & [2,7] & [3,7] & [4,7] & [5,7] & [6,7] \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} [2,3] & [2,4] & [2,5] & [2,6] \\ [2,4] & [2,5] & [2,6] & [3,6] \\ [2,5] & [2,6] & [3,6] & [4,6] \\ [2,6] & [3,6] & [4,6] & [5,6] \end{Vmatrix}, \qquad \begin{Vmatrix} [3,4] & [3,5] \\ [3,5] & [4,5] \end{Vmatrix},$$

und addieren die Elemente der drei kleinen Matrizes zu den Elementen im Zentrum der großen Matrix. Die Bézoutsche Eliminante ist die Gleichung, die man durch Nullsetzen der Determinante der so gewonnenen Matrix erhält.

Im speziellen Falle teilen wir die Zeilen der Determinante durch

$$(uv)^{-\frac{17}{4}}\left(\frac{u-v}{u+v}\right)^{\frac{1}{2}},\quad (uv)^{-\frac{5}{4}}(u^2-v^2)^{\frac{1}{2}},\quad (uv)^{\frac{11}{4}}\left(\frac{u-v}{u+v}\right)^{\frac{1}{2}},\quad (uv)^{\frac{23}{4}}(u^2-v^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$(uv)^{-\frac{9}{4}}\left(\frac{u-v}{u+v}\right)^{\frac{1}{2}},\quad (uv)^{\frac{3}{4}}(u^2-v^2)^{\frac{1}{2}},\quad (uv)^{\frac{19}{4}}\left(\frac{u-v}{u+v}\right)^{\frac{1}{2}},\quad (uv)^{\frac{31}{4}}(u^2-v^2)^{\frac{1}{2}}$$

und die Spalten durch

$$(uv)^{-\frac{19}{4}}(u^2-v^2)^{\frac{1}{2}},\quad (uv)^{-\frac{3}{4}}\left(\frac{u-v}{u+v}\right)^{\frac{1}{2}},\quad (uv)^{\frac{9}{4}}(u^2-v^2)^{\frac{1}{2}},\quad (uv)^{\frac{25}{4}}\left(\frac{u-v}{u+v}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$(uv)^{-\frac{11}{4}}(u^2-v^2)^{\frac{1}{2}},\quad (uv)^{\frac{5}{4}}\left(\frac{u-v}{u+v}\right)^{\frac{1}{2}},\quad (uv)^{\frac{17}{4}}(u^2-v^2)^{\frac{1}{2}},\quad (uv)^{\frac{33}{4}}\left(\frac{u-v}{u+v}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Wir schreiben jetzt die so reduzierte Determinante achten Grades in der kurzen Form

$$|a_{rs}| \qquad (r, s = 1, 2, 3, \ldots, 8).$$

Die Elemente dieser Determinante haben folgende Werte:

$$a_{11} = 8^{\frac{1}{2}}(uv)^{+12}\left(\frac{u^3}{v^3}+\frac{u^2}{v^2}+\frac{u}{v}+1+\frac{v}{u}+\frac{v^2}{u^2}+\frac{v^3}{u^3}\right),$$

$$a_{14} = a_{32} = a_{58} = a_{76} = -7\left(\frac{u}{v}+\frac{v}{u}\right),$$

$$a_{23} = a_{41} = a_{67} = a_{85} = -7\left(\frac{u}{v}+\frac{v}{u}\right)\left(\frac{u}{v}+2+\frac{v}{u}\right),$$

$$a_{24} = a_{33} = a_{42} = a_{57} = a_{66} = a_{75} = -7\cdot 8^{\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{v}+1+\frac{v}{u}\right),$$

$$a_{17} = a_{26} = a_{35} = a_{53} = a_{62} = a_{71} = a_{28} = a_{37} = a_{46} = a_{64} = a_{73} = a_{82} = 8^{\frac{1}{2}},$$

$$a_{44} = 8^{\frac{1}{2}}(uv)^{-12}, \qquad a_{55} = 8^{\frac{1}{2}}(uv)^{+12},$$

$$a_{36} = a_{54} = a_{72} = -\left(\frac{u^3}{v^3} + \frac{u}{v} + \frac{v}{u} + \frac{v^3}{u^3}\right) + 8\left(\frac{u^2}{v^2} + 1 + \frac{v^2}{u^2}\right),$$

$$a_{27} = a_{45} = a_{63} = \left[-\left(\frac{u^3}{v^3} + \frac{u}{v} + \frac{v}{u} + \frac{v^3}{u^3}\right) + 8\left(\frac{u^2}{v^2} + 1 + \frac{v^2}{u^2}\right)\right]\left(\frac{u}{v} + 2 + \frac{v}{u}\right),$$

$$a_{18} = -\left(\frac{u^3}{v^3} + \frac{u}{v} + \frac{v}{u} + \frac{v^3}{u^3}\right),$$

$$a_{81} = -\left(\frac{u^3}{v^3} + \frac{u}{v} + \frac{v}{u} + \frac{v^3}{u^3}\right)\left(\frac{u}{v} + 2 + \frac{v}{u}\right),$$

$$a_{88} = 8^{\frac{1}{2}}(uv)^{-12}\left(\frac{u^3}{v^3} + \frac{u^2}{v^2} + \frac{u}{v} + 1 + \frac{v}{u} + \frac{v^2}{u^2} + \frac{v^3}{u^3}\right).$$

Die anderen 26 Elemente (d. h. a_{12}, a_{13}, a_{15}, a_{16}, a_{21}, a_{22}, a_{25}, a_{31}, a_{34}, a_{38}, a_{43}, a_{47}, a_{48}, a_{51}, a_{52}, a_{56}, a_{61}, a_{65}, a_{68}, a_{74}, a_{77}, a_{78}, a_{83}, a_{84}, a_{86}, a_{87}) der Determinante sind gleich Null.

Die Bézoutsche Eliminante wird somit die Gleichung

$$|a_{rs}| = 0 \qquad (r, s = 1, 2, 3, \ldots, 8).$$

Es sei jetzt

$$\frac{u}{v} + \frac{v}{u} = A, \qquad u^{12}v^{12} + \frac{1}{u^{12}v^{12}} = B.$$

Die Entwicklung der Determinante gibt dann augenscheinlich die verlangte Transformationsgleichung in der Form

$$4096\,B^2(A^3 + A^2 - 2A - 1) = 64\,B\,\Phi_1(A) + \Phi_2(A),$$

wo $\Phi_1(A)$ und $\Phi_2(A)$ Polynome in A sind. Sicherlich haben diese Polynome ganzzahlige Koeffizienten.

Die Berechnung der Werte der Koeffizienten in $\Phi_1(A)$ und $\Phi_2(A)$ durch die Determinante ist wegen der großen Anzahl von Gliedern untunlich. Durch die folgenden Methoden vermeide ich die Mühe der Berechnung.

Ist der Parameter q klein, so ist

$$A = O(q^{-2}), \qquad B = O(q^{-25}).$$

Die Entwicklung der Funktion

$$4096\,B^2(A^3 + A^2 + 2A - 1) - 64\,B\,\Phi_1(A) - \Phi_2(A)$$

nach Potenzen von q ist identisch Null, und die Betrachtung der kleinsten Potenz von q zeigt folglich, daß die Grade der höchsten Potenzen von A in $\Phi_1(A)$ und $\Phi_2(A)$ notwendig 15 bzw. 28 sind. Aus den genaueren Formeln

$$A = q^{-2} + O(q^{-1}), \qquad B = \frac{q^{-25}}{64} + O(q^{-24})$$

folgt das Resultat, daß der Koeffizient von A^{28} in $\Phi_2(A)$ gleich 1 ist.

Man setze $-q$ statt q in der Transformationsgleichung; dann ist die zugeordnete Gleichung

$$4096\,B_1^2(A_1^3 + A_1^2 - 2A_1 - 1) + 64B_1\,\Phi_1(A_1) = \Phi_2(A_1),$$

wobei

$$A_1 = \frac{f_1(\tau)}{f_1(49\tau)} + \frac{f_1(49\tau)}{f_1(\tau)}, \qquad B_1 = \frac{f_1^{12}(\tau)\,f_1^{12}(49\tau)}{64} + \frac{64}{f_1^{12}(\tau)\,f_1^{12}(49\tau)}.$$

Bestimmen wir jetzt die Polynome $\Phi_1(A_1)$ und $\Phi_2(A_1)$ durch Betrachtung der assoziierten Klasseninvarianten. In der zugeordneten Transformationsgleichung sei

$$\begin{aligned} 49\tau &= -m + \sqrt{m^2 - 98} \qquad (m = 0, 2, 4, 6, 8) \\ &= -m + \sqrt{-n} \qquad (n = 98, 94, 82, 62, 34), \end{aligned}$$

wobei

$$n = 98 - m^2.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} f_1(49\tau) &= e^{\frac{m\pi i}{24}} f_1(\sqrt{-n}) = e^{\frac{m\pi i}{24}} 2^{\frac{1}{4}} g_n, \\ f_1(\tau) &= \frac{\sqrt{2}}{f_2(\frac{1}{2}\tau)} = \frac{\sqrt{2}}{f_1(-2/\tau)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{f_1(m + \sqrt{m^2 - 98})} = \frac{e^{\frac{m\pi i}{24}} 2^{\frac{1}{4}}}{g_n}, \end{aligned}$$

d. h.

$$A_1 = g_n^2 + g_n^{-2}, \qquad B_1 = +2.$$

Gewisse Lösungen der Gleichung

$$\Phi_2(A_1) - 128\,\Phi_1(A_1) - 16384\,(A_1^3 + A_1^2 - 2A_1 - 1) = 0$$

sind also

$$A_1 = g_n^2 + g_n^{-2} \qquad (n = 98, 94, 82, 62, 34).$$

Die Werte von g_{98}, g_{94}, g_{62} wurden von Ramanujan [1]) behauptet; die Beweise für seine Resultate habe ich [2]) in einer neulich erschienenen Abhandlung auseinandergesetzt. Die Formeln für g_{82} und g_{34} wurden von Weber [3]) angegeben (g_{82} unrichtig). Nun ist aber

$$g_{98} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{14 + 4\sqrt{14}}}{2}, \qquad g_{94} = \frac{\sqrt{7 + \sqrt{2}} + \sqrt{7 + 5\sqrt{2}}}{2},$$

$$g_{82}^2 + g_{82}^{-2} = \frac{9 + \sqrt{41}}{2}, \qquad g_{62} = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{2}} + \sqrt{9 + 5\sqrt{2}}}{2},$$

$$g_{34}^2 + g_{34}^{-2} = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}.$$

Daher sind die Gleichungen kleinsten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten, deren Lösungen $g_n^2 + g_n^{-2}$ ($n = 98, 94, 82, 62, 34$) sind, in den entsprechenden Fällen:

$$\begin{aligned} &A_1^4 - 8A_1^3 - 18A_1^2 + 24A_1 + 65 = 0, \\ &A_1^4 - 6A_1^3 - 25A_1^2 - 24A_1 - 8 = 0, \\ &A_1^2 - 9A_1 + 10 = 0, \\ &A_1^4 - 2A_1^3 - 17A_1^2 - 24A_1 - 8 = 0, \\ &A_1^2 - 3A_1 - 2 = 0. \end{aligned}$$

Nun mache ich die Hypothese, daß die Modulargleichungen für den 25-sten Transformationsgrad und für den 49-sten Transformationsgrad dieselben Eigenschaften in bezug auf Klasseninvarianten haben; unter dieser Annahme enthält die Gleichung

---

[1]) Ramanujan, Quarterly Journal of Math. **45** (1914), S. 356.

[2]) Watson, Quarterly Journal of Math. (Oxford Series) **3** (1932), S. 189—212.

[3]) Weber, Algebra **3** (1908), S. 547.

$$\Phi_2(A_1) - 128\,\Phi_1(A_1) - 16384\,(A_1^3 + A_1^2 - 2A_1 - 1) = 0$$

die obenerwähnten Gleichungen der Klasseninvarianten $g_n^2 + g_n^{-2}$ als mehrfache Faktoren, (ausgenommen den mit g_{98} assoziierten unregelmäßigen Faktor) und enthält keine unbrauchbaren Faktoren.

Weber [1]) hat den Grund dafür angegeben, daß gewisse Faktoren als Quadrat vorkommen: wenn diese Faktoren mehrfach sind, bleibt kein Platz für irgendwelche unbrauchbaren Faktoren übrig, da der Grad von $\Phi_2(A_1)$ nur 28 ist.

Aus diesem Grunde haben wir identisch

$$\begin{aligned}\Phi_2(A_1) - 128\,\Phi_1(A_1) - 16384\,(A_1^3 + A_1^2 - 2A_1 - 1)\\ \equiv (A_1^4 - 8A_1^3 - 18A_1^2 + 24A_1 + 65)\\ \times (A_1^4 - 6A_1^3 - 25A_1^2 - 24A_1 - 8)^2\,(A_1^2 - 9A_1 + 10)^2\\ \times (A_1^4 - 2A_1^3 - 17A_1^2 - 24A_1 - 8)^2\,(A_1^2 - 3A_1 - 2)^2,\end{aligned}$$

d. h.

$$\begin{aligned}\Phi_2(A_1) - 128\,\Phi_1(A_1) - 16384\,(A_1^3 + A_1^2 - 2A_1 - 1)\\ \equiv A_1^{28} - 48\,A_1^{27} + 904\,A_1^{26} - 7768\,A_1^{25} + 17916\,A_1^{24} + 1\,73368\,A_1^{23}\\ - 10\,17776\,A_1^{22} - 16\,04920\,A_1^{21} + 189\,58134\,A_1^{20} + 132\,07704\,A_1^{19}\\ - 2145\,26048\,A_1^{18} - 2048\,40744\,A_1^{17} + 15139\,23244\,A_1^{16}\\ + 25998\,22824\,A_1^{15} - 52141\,73008\,A_1^{14} - 1\,67485\,56456\,A_1^{13}\\ - 17364\,98927\,A_1^{12} + 4\,37055\,29976\,A_1^{11} + 5\,46553\,72248\,A_1^{10}\\ - 1\,44952\,61856\,A_1^{9} - 9\,25915\,42000\,A_1^{8} - 8\,21399\,12704\,A_1^{7}\\ - 14137\,79968\,A_1^{6} + 5\,70180\,32128\,A_1^{5} + 5\,60007\,68000\,A_1^{4}\\ + 2\,84892\,20096\,A_1^{3} + 85576\,90880\,A_1^{2} + 14450\,68800\,A_1 + 1064\,96000.\end{aligned}$$

Wir wenden uns nun zu den Klasseninvarianten G_n. In der zugeordneten Modulargleichung für den 49-sten Transformationsgrad sei

$$\begin{aligned}49\,\tau &= -m + \sqrt{m^2 - 98} && (m = 1, 3, 5, 7, 9)\\ &= -m + \sqrt{-n} && (n = 97, 89, 73, 49, 17),\end{aligned}$$

wobei

$$n = 98 - m^2.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}f_1(49\,\tau) &= e^{\frac{m\pi i}{24}} f(\sqrt{-n}) = e^{\frac{m\pi i}{24}} 2^{\frac{1}{4}} G_n,\\ f_1(\tau) &= \frac{\sqrt{2}}{f_2(\frac{1}{2}\tau)} = \frac{\sqrt{2}}{f_1(-2/\tau)}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{f_1(m + \sqrt{m^2 - 98})} = \frac{e^{\frac{m\pi i}{24}} 2^{\frac{1}{4}}}{G_n},\end{aligned}$$

d. h. $$A_1 = G_n^2 + G_n^{-2}, \qquad B_1 = -2.$$

Gewisse Lösungen der Gleichung

$$\Phi_2(A_1) + 128\,\Phi_1(A_1) - 16384\,(A_1^3 + A_1^2 - 2A_1 - 1) = 0$$

sind also

$$A_1 = G_n^2 + G_n^{-2} \qquad (n = 97, 89, 73, 49, 17).$$

[1]) Weber, Algebra **3** (1908), S. 490.

Nun ist aber [1])

$$G_{97}^2 + G_{97}^{-2} = \frac{9+\sqrt{97}}{2}, \qquad G_{73}^2 + G_{73}^{-2} = \frac{5+\sqrt{73}}{2},$$

$$G_{49}^2 + G_{49}^{-2} = 2+\sqrt{7}, \qquad G_{17}^2 + G_{17}^{-2} = \frac{1+\sqrt{17}}{2}.$$

Daher sind die Gleichungen kleinsten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten, deren Lösungen $G_n^2 + G_n^{-2} (n = 97, 73, 49, 17)$ sind, in den entsprechenden Fällen:

$$A_1^2 - 9A_1 - 4 = 0, \qquad A_1^2 - 5A_1 - 12 = 0,$$
$$A_1^2 - 4A_1 - 3 = 0, \qquad A_1^2 - A_1 - 4 = 0.$$

Man hat noch keine gleichartige Gleichung für G_{89} gebildet; eine Gleichung von Mitra [2]), die G_{89} betrifft, ist für unsere Zwecke unbrauchbar. Wir können aber

$$\psi(A_1) = 0$$

als die gewünschte Gleichung für $G_{89}^2 + G_{89}^{-2}$ nehmen, bei welcher der Koeffizient der höchsten Potenz von A_1 natürlich 1 ist. Aus der Gaußschen Klassenzahl (II. 6) der negativen Diskriminante -89 folgt, daß der Grad der Gleichung $\psi(A_1) = 0$ notwendig 6 ist.

Nun mache ich die Hypothese, daß die Gleichung

$$\Phi_2(A_1) + 128\,\Phi_1(A_1) - 16384(A_1^3 + A_1^2 - 2A_1 - 1) = 0$$

die Gleichungen der Klasseninvarianten als *mehrfache* Faktoren enthält; daher bleibt kein Platz für unbrauchbare Faktoren übrig. Folglich haben wir identisch

$$\Phi_2(A_1) + 128\,\Phi_1(A_1) - 16384(A_1^3 + A_1^2 - 2A_1 - 1)$$
$$\equiv (A_1^2 - 9A_1 - 4)^2\ \psi^2(A_1)(A_1^2 - 5A_1 - 12)^2\ (A_1^2 - 4A_1 - 3)^2\,(A_1^2 - A_1 - 4)^2.$$

Aus der Gleichung

$$\Phi_2(A_1) + 128\,\Phi_1(A_1) - 16384(A_1^3 + A_1^2 - 2A_1 - 1)$$
$$\equiv \{\Phi_2(A_1) - 128\,\Phi_1(A_1) - 16384(A_1^3 + A_1^2 - 2A_1 - 1)\} + 256\Phi_1(A_1)$$

in Verbindung mit dem Resultat, daß 15 der Grad von $\Phi_1(A_1)$ ist, folgt die Formel

$$\psi^2(A_1)(A_1^2 - 9A_1 - 4)^2\,(A_1^2 - 5A_1 - 12)^2\,(A_1^2 - 4A_1 - 3)^2\,(A_1^2 - A_1 - 4)$$
$$= A_1^{28} - 48A_1^{27} + 904A_1^{26} - 7768A_1^{25} + 17916A_1^{24} + 1\,73368A_1^{23}$$
$$- 10\,17776A_1^{22} - 16\,04920A_1^{21} + \cdots,$$

in der die letzten 16 Koeffizienten des Polynomes auf der rechten Seite immer noch unbekannt bleiben. Wir teilen durch die bekannten Faktoren auf der linken Seite und folgern

$$\psi^2(A_1) \equiv A_1^{12} - 10A_1^{11} - 29A_1^{10} + 220A_1^9 + 1035A_1^8 + 1158A_1^7$$
$$- 1295A_1^6 - 3936A_1^5 - \cdots.$$

Weil $\psi(A_1)$ nur sieben Glieder enthält, bestimmt die Berechnung der Quadratwurzel des Polynoms auf der rechten Seite der letzten Gleichung $\psi(A_1)$ *vollständig*. Damit ergibt sich

$$\psi(A_1) \equiv A_1^6 - 5A_1^5 - 27A_1^4 - 25A_1^3 + 28A_1^2 + 44A_1 + 16.$$

---

[1]) Weber, Algebra **3** (1908), S. 547.

[2]) Mitra, Annals of Math. **30** (1929), S. 78—79.

Jetzt haben wir zwei Gleichungen für die zwei unbekannten Funktionen $\Phi_1(A_1)$ und $\Phi_2(A_1)$ gebildet, nämlich

$$\begin{aligned}
&\Phi_2(A_1) - 128\,\Phi_1(A_1) - 16384(A_1^3 + A_1^2 - 2A_1 - 1)\\
&\quad\equiv (A_1^4 - 8A_1^3 - 18A_1^2 + 24A_1 + 65)\\
&\quad\times (A_1^4 - 6A_1^3 - 25A_1^2 - 24A_1 - 8)^2\,(A_1^2 - 9A_1 + 10)^2\\
&\quad\times (A_1^4 - 2A_1^3 - 17A_1^2 - 24A_1 - 8)^2\,(A_1^2 - 3A_1 - 2)^2,\\
&\Phi_2(A_1) + 128\,\Phi_1(A) - 16384(A_1^3 + A_1^2 - 2A_1 - 1)\\
&\quad\equiv (A_1^6 - 5A_1^5 - 27A_1^4 - 25A_1^3 + 28A_1^2 + 44\,A_1 + 16)^2\\
&\quad\times (A_1^2 - 9A_1 - 4)^2\,(A_1^2 - 5A_1 - 12)^2\\
&\quad\times (A_1^2 - 4A_1 - 3)^2\,(A_1^2 - A_1 - 4)^2.
\end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen ergibt zwei Formen der Modulargleichungen für den 49-sten Transformationsgrad. Die kürzere Form ist

$$\begin{aligned}
&16384\,(B^2 - 4)\,(A^3 + A^2 - 2A - 1)\\
&\quad= (B + 2)\,(A^6 - 5A_5 - 27A^4 - 25A^3 + 28A^2 + 44A + 16)^2\\
&\quad\times (A^2 - 9A - 4)^2\,(A^2 - 5A - 12)^2\\
&\quad\times (A^2 - 4A - 3)^2\,(A^2 - A - 4)^2\\
&\quad- (B - 2)\,(A^4 - 8A^3 - 18A^2 - 24A + 65)\\
&\quad\times (A^4 - 6A^3 - 25A^2 - 24A - 8)^2\,(A^2 - 9A + 10)^2\\
&\quad\times (A^4 - 2A^3 - 17A^2 - 24A - 8)^2\,(A^2 - 3A - 2)^2,
\end{aligned}$$

$$A = \frac{f(\tau)}{f(49\tau)} + \frac{f(49\tau)}{f(\tau)}, \qquad B = \frac{f^{12}(\tau)\,f^{12}(49\tau)}{64} + \frac{64}{f^{12}(\tau)\,f^{12}(49\tau)}.$$

Die volle Form ist

$$\begin{aligned}
&4096\,B^2(A^3 + A^2 - 2A - 1)\\
&\quad= A^{28} - 48\,A^{27} + 904\,A^{26} - 7768\,A^{25} + 17916\,A^{24} + 1\,73368\,A^{23}\\
&\quad- 10\,17776\,A^{22} - 16\,04920\,A^{21} + 189\,58134\,A^{20} + 132\,07704\,A^{19}\\
&\quad- 2145\,26048\,A^{18} - 2048\,40744\,A^{17} + 15139\,23244\,A^{16}\\
&\quad+ 25998\,29096\,A^{15} - 52136\,77520\,A^{14} - 1\,67391\,92360\,A^{13}\\
&\quad- 16590\,70191\,A^{12} + 4\,40656\,56568\,A^{11} + 5\,56891\,76152\,A^{10}\\
&\quad- 1\,26518\,23392A^9 - 9\,08204\,45680A^8 - 8\,22080\,32000A^7\\
&\quad- 42672\,01280\,A^6 + 5\,25987\,30752\,A^5 + 5\,22451\,44576\,A^4\\
&\quad+ 2\,64870\,13376\,A^3 + 77897\,64352\,A^2 + 13170\,44224\,A + 956\,98944\\
&\quad+ 448\,B(7\,A^{15} + 553\,A^{14} + 10451\,A^{13} + 86416\,A^{12} + 4\,01927\,A^{11}\\
&\qquad+ 11\,53799\,A^{10} + 20\,57409\,A^9 + 19\,76670\,A^8 - 76026\,A^7\\
&\qquad- 31\,84622\,A^6 - 49\,32256\,A^5 - 41\,91544\,A^4 - 22\,34624\,A^3\\
&\qquad- 7\,45472\,A^2 - 1\,42848\,A - 12032).
\end{aligned}$$

Zur Bestätigung prüft man einfach den Wert ($448 \cdot 7 = 3136$) des Koeffizienten von $A^{15}B$ aus den q-Reihen.

7. Die Klasseninvariante G_{89}.

In § 6 haben wir gefunden, daß $G_{89}^2 + G_{89}^{-2}$ eine Lösung der Gleichung

$$A_1^6 - 5A_1^5 - 27A_1^4 - 25A_1^3 + 28A_1^2 + 44A_1 + 16 = 0$$

sein muß. Diese Gleichung wird einfach auf die zwei Gleichungen

$$2A_1^3 - 5A_1^2 - 11A_1 - 8 = \pm (A_1^2 + A_1)\sqrt{89}$$

reduziert, und daher ist

$$(G_{89}^2 + G_{89}^{-2})^3 - \frac{5+\sqrt{89}}{2}(G_{89}^2 + G_{89}^{-2})^2 - \frac{11+\sqrt{89}}{2}(G_{89}^2 + G_{89}^{-2}) - 4 = 0.$$

Das richtige Zeichen für $\pm\sqrt{89}$ wird durch numerische Berechnung des q-Produktes von G_{89} bestimmt.

Das Vorkommen der Wurzel $\sqrt{89}$ in der letzten Gleichung bildet eine weitere Bestätigung der Richtigkeit der Modulargleichung für den 49-sten Transformationsgrad.

Eingegangen 7. September 1932.

Eine Darstellung des Integrales der Riccatischen Gleichung: $y' + y^2 = f(x)$.

Von *Rudolf Dietrich* in Dresden.

Von einer gesuchten Funktion $y(x)$ verlangen wir, daß sie die Gleichung

$$y - e^{-\int_a^x y\,dx} \int_a^x e^{\int_a^x y\,dx} f(x)\,dx = 0 \tag{1}$$

erfüllt; dabei ist a eine willkürliche Konstante und $f(x)$ eine vorgegebene Funktion. (Hier und auch im folgenden sind sämtliche Integrationsvariable mit x bezeichnet.) Durch Differentation von (1) überzeugt man sich leicht, daß y auch der Gleichung

$$y' + y^2 = f(x) \tag{2}$$

genügt. Nimmt man in (1) zwei partielle Integrationen vor, so erhält man

$$y - \int_a^x f\,dx + y \int_a^x \int_a^x f\,dx^2 - e^{-\int_a^x y\,dx} \int_a^x \left\{ e^{\int_a^x y\,dx} (y^2 + y') \int_a^x \int_a^x f\,dx^2 \right\} dx = 0;$$

wegen (2) ist dann

$$y - \int_a^x f\,dx + y \int_a^x \int_a^x f\,dx^2 - e^{-\int_a^x y\,dx} \int_a^x \left(e^{\int_a^x y\,dx} f \int_a^x \int_a^x f\,dx^2 \right) dx = 0.$$

Setzt man diesen Prozeß fort, und führt man die auch sonst gebräuchlichen Abkürzungen

$$\frac{1}{p} f(x) = \int_a^x f(x)\,dx, \qquad \frac{1}{p^2} f(x) = \int_a^x \int_a^x f(x)\,dx^2, \ldots.$$

ein, so ergibt sich:

$$y - \frac{1}{p} f + y \frac{1}{p^2} f - \frac{1}{p} \left(f \frac{1}{p^2} f \right) + y \frac{1}{p^2} \left(f \frac{1}{p^2} f \right) \mp \cdots = 0$$

$$y \left(1 + \frac{1}{p^2} f + \frac{1}{p^2} \left(f \frac{1}{p^2} f \right) + \cdots \right) = \frac{1}{p} f + \frac{1}{p} \left(f \frac{1}{p^2} f \right) + \cdots.$$

Da nun beide Reihen konvergent sind, können wir die gesuchte Funktion y darstellen durch:

$$y = \frac{\frac{1}{p} f + \frac{1}{p} \left(f \frac{1}{p^2} f \right) + \frac{1}{p} \left(f \frac{1}{p^2} \left(f \frac{1}{p^2} f \right) \right) + \cdots}{1 + \frac{1}{p^2} f + \frac{1}{p^2} \left(f \frac{1}{p^2} f \right) + \cdots}. \tag{3}$$

Dieser Ausdruck erfüllt wirklich die Riccatische Gleichung (2); er hat die Eigenschaft, an der Stelle $x = a$ zu verschwinden.

Eingegangen 17. September 1932.

Ein neues, ganz billiges Lehrbuch der höheren Mathematik

In drei Bänden

Lehrbuch der höheren Mathematik

für Universitäten und Technische Hochschulen

bearbeitet von

Dr. GERHARD KOWALEWSKI

o. Professor an der Technischen Hochschule zu Dresden,
o. Mitglied der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig

Erster Band: Vektorrechnung und analytische Geometrie. Mit 67 Figuren. IV, 210 Seiten. 1933.

Zweiter Band: Hauptpunkte der analytischen Geometrie des Raumes. Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung. Mit 18 Figuren. IV, 240 Seiten. 1933.

Dritter Band: Abschluß der Differential- und Integralrechnung. Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen. Differentialgeometrie. Funktionentheorie. Hauptpunkte der Variationsrechnung und der Theorie der Integralgleichungen. Mit 11 Figuren. Ca. 240 Seiten. 1933.

Jeder Band ist einzeln käuflich. In Ganzleinen geb. je RM 3.80

Dieses neue, billige Lehrbuch ist aus der Vorlesungspraxis heraus entstanden und gibt in klarem Aufbau eine hervorragende Einführung in die höhere Mathematik. Die bekannte pädagogische Meisterschaft Kowalewski's, die in allen Mathematikerkreisen größte Anerkennung gefunden hat, bewährt sich auch in diesem Werk, das sich würdig seinen früheren Lehrbüchern anschließt.

WALTER DE GRUYTER & CO., BERLIN W 10

Genthiner Straße 38

Neue Schriften der Preußischen Akademie der Wissenschaften

Physikalisch-Mathematische Klasse

Sonderausgaben in Auswahl.

Bargmann, V., Bemerkungen zur allgemein-relativistischen Fassung der Quantentheorie. 11 Seiten. 1932 ..... RM 1.—

Becker, Fr., Zur Struktur des Sternsystems in der Umgebung der Sonne II. Mit 6 Tafeln. 21 Seiten. 1932 ..... „ 8.—

Feller, Willy, Allgemeine Maßtheorie und Lebesguesche Integration. 16 Seiten. 1932 ..... „ 1.—

Freudenthal, Hans, Über dimensionserhöhende stetige Abbildungen. 7 Seiten. 1932 ..... „ 1.—

Guthnick, P., Der Ausbau der Sternwarte Berlin-Babelsberg in den Jahren 1921—32. 11 Seiten. 1932 ..... „ 1.—

Guthnick, P., und H. Schneller, Die Bedeckung der B-Komponente von Zeta Aurigae im Winter 1931—32. 18 Seiten. 1932.. „ 1.—

Hopf, Eberhard, Über lineare Gruppen unitärer Operatoren im Zusammenhange mit den Bewegungen dynamischer Systeme. 11 Seiten. 1932 ..... „ 1.—

Klose, Alfred, Die Bohrschen Quantenbedingungen. 26 Seiten. 1932 ..... „ 2.—

Kohlhörster, Werner, Zur Prüfung der Theorie des vertikalen Zählrohreffekts der Höhenstrahlung. Mit 1 Tafel. 7 Seiten. 1932 „ 2.—

Ludendorff, H., Über die Lichtkurven der Mira-Sterne der Spektralklasse Me. 27 Seiten. 1932 ..... „ 2.—

Reichenbach, Hans, Wahrscheinlichkeitslogik. 15 Seiten. 1932.. „ 1.—

Schmidt, Erhard, Über den Millouxschen Satz. 10 Seiten. 1932 „ 1.—

Schrödinger, E., Diracsches Elektron im Schwerefeld I. 26 Seiten. 1932 ..... „ 2.—

Tuwim, Leo, Grundzüge einer mathematischen Theorie der Höhenstrahlungskoinzidenzen in Zählrohren. 122 Seiten. 1932.... „ 7.50

WALTER DE GRUYTER & CO., BERLIN W 10

Genthiner Str. 38.